



# AMELIORATION DE LA FORMULATION EN POTENTIEL SCALAIRE MAGNETIQUE ET GENERALISATION AU COUPLAGE ENTRE EQUATIONS DE CHAMP ET DE CIRCUIT ELECTRIQUE

Huu Tuan Luong

## ► To cite this version:

Huu Tuan Luong. AMELIORATION DE LA FORMULATION EN POTENTIEL SCALAIRE MAGNETIQUE ET GENERALISATION AU COUPLAGE ENTRE EQUATIONS DE CHAMP ET DE CIRCUIT ELECTRIQUE. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1997. Français. NNT : . tel-00907418

**HAL Id: tel-00907418**

**<https://theses.hal.science/tel-00907418>**

Submitted on 21 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **THESE**

Présentée par

**Huu Tuan LUONG**

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

**De l'Institut National Polytechnique de GRENOBLE**

(Arrêté Ministériel du 30 Mars 1992)

Spécialité : Génie Electrique

<p><b>AMELIORATION DE LA FORMULATION EN POTENTIEL SCALAIRE MAGNETIQUE ET GENERALISATION AU COUPLAGE ENTRE EQUATIONS DE CHAMP ET DE CIRCUIT ELECTRIQUE</b></p>
---

Soutenue le **30 Septembre 1997** devant la Commission d'Examen

*Composition du Jury :*

Monsieur Alain NICOLAS	Président, Rapporteur
Monsieur Francis PIRIOU	Rapporteur
Monsieur Patrick DULAR	Examineur
Monsieur Xavier BRUNOTTE	Examineur
Monsieur Gérard MEUNIER	Examineur
Monsieur Yves MARECHAL	Examineur

**Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble**



*Xin được cảm ơn*

*Bà Mẹ - Công lao sinh thành dưỡng dục*

*Bố - Tình yêu và sự ủng hộ triu mến*





Je remercie chaleureusement tous les collègues et amis du L.E.G, pour tous les discussions, les conseils ou les bons moments passés ensemble

Frédéric BLOCH, Etiennette CALLEGHER, Claire DIVOUX, Patrick EUSTACHE, Fabiano GARCIA, Patrick GUILLOT, Antoine JAROSZ, Gwanelle LE COAT, Sylvain MAGINIER, Djelloul MOUSAOUI, Le Thuy NGO, Quoc Tuan TRAN, Thanh Nam NGUYEN, Duc Trong VU, Florence OSSART, Roland PACAUD, Gilbert REYNE, Stéphanie RICHARD, Lucas SALUDJIAN, Till WELFONDER, Laurent GROS, et tous ce que j'ai oublié.

Mes amicales pensées à tous (tes) mes amis (es).

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>23</b>
 <b>PARTIE A</b>	
<b>PROBLEME MAGNETOSTATIQUE .....</b>	<b>29</b>
 <b>Chapitre I</b>	
<b>Amélioration de la précision dans les régions perméables .....</b>	<b>33</b>
 <b>I.1. Introduction .....</b>	<b>33</b>
<b>I.2. Problème type .....</b>	<b>33</b>
<b>I.3. Problème d'imprécision .....</b>	<b>34</b>
I.3.1. Formulation souhaitée.....	34
I.3.2. Mise en évidence pratique du problème d'imprécision.....	35
I.3.3. Solution pour le problème d'imprécision.....	36
I.3.3.1. Analyse générale des solutions.....	36
I.3.3.2. Solution utilisant le potentiel réduit.....	37
I.3.3.3. Solution utilisant le potentiel d'arête et l'arbre.....	37
I.3.3.4. Solution utilisant le potentiel d'arête et la jauge implicite.....	38
I.3.3.5. Solution utilisant le potentiel total.....	38
I.3.3.6. Solution utilisant le potentiel différent.....	39
I.3.3.7. Solution utilisant le potentiel général.....	40
I.3.3.8. Résumé.....	41
I.3.4. Méthode retenue.....	41
I.3.4.1. Choix de méthode.....	41
I.3.4.2. Formulation en potentiels réduit et total.....	42
<b>I.4. Calcul de couplage.....</b>	<b>44</b>
I.4.1. Continuité tangentielle du champ magnétique.....	44
I.4.2. Méthode intégrale.....	45

I.4.2.1. Analyse.....	45
I.4.2.2. Mise en évidence du problème d'imprécision .....	46
I.4.2.3. Explication du problème d'imprécision.....	46
I.4.3. Méthode variationnelle.....	47
I.4.4. Choix de la méthode de couplage.....	48
<b>I.5. Démarche de la résolution.....</b>	<b>49</b>
I.5.1. Première résolution.....	50
I.5.2. Deuxième résolution.....	50
<b>I.6. Validation.....</b>	<b>50</b>
I.6.1. Description du problème.....	51
I.6.2. Résultats.....	51
<b>I.7. Conclusions.....</b>	<b>55</b>
 <b>Chapitre 2 .....</b>	 <b>61</b>
<b>Génération robuste de l'ensemble complexe des conditions aux limites</b>	
 <b>II.1. Introduction.....</b>	 <b>61</b>
<b>II.2. Introduction des conditions aux limites dans le système global.....</b>	<b>62</b>
II.2.1. Méthode d'introduction des conditions aux limites.....	62
II.2.1.1. Méthode du terme diagonal dominant.....	62
II.2.1.2. Méthode du terme unité sur la diagonale.....	63
II.2.1.3. Méthode de suppression des équations.....	63
II.2.1.4. Choix de méthode.....	63
II.2.2. Contraintes mal séparées.....	64
II.2.3. Méthode d'élimination de Gauss.....	66
<b>II.3. Transformation de Gauss avec précision .....</b>	<b>67</b>
II.3.1. Transformation locale et problème d'imprécision.....	67
II.3.2. Transformation globale .....	68
<b>II.4. Transformation de Gauss économique.....</b>	<b>69</b>
II.4.1. Efficacité et découpage en morceaux indépendants.....	69
II.4.2. Problème de stockage.....	70
II.4.3. Rangement des matrices.....	70

<b>II.5. Procédure de la génération robuste.....</b>	<b>71</b>
<b>II.6. Applications.....</b>	<b>72</b>
II.6.1. Utilisation rationnelle du potentiel scalaire réduit.....	72
II.6.1.1. Conditions étendues utilisant le potentiel scalaire réduit.....	73
II.6.1.2. Application au ralentisseur magnétique 3D .....	74
II.6.2. Autres applications.....	78
<b>II.7. Conclusions.....</b>	<b>78</b>
 <b>Chapitre 3.....</b>	 <b>83</b>
<b>Traitement du problème de connexité</b>	
 <b>III.1. Introduction.....</b>	 <b>83</b>
<b>III.2. Problème de connexité.....</b>	<b>84</b>
III.2.1. Mise en évidence pratique.....	84
III.2.2. Solution du problème de connexité.....	85
III.2.2.1. Analyse générale.....	85
III.2.2.2. Solution utilisant la coupure à saut de potentiel.....	86
<b>III.3. Coupure et saut de potentiel.....</b>	<b>86</b>
III.3.1. Création de la coupure.....	86
III.3.1.1. Eléments coques.....	86
III.3.1.2. Allocation des noeuds dédoublés aux éléments surfaciques.....	87
III.3.1.3. Création automatique de la coupure.....	89
III.3.2. Conditions de coupure.....	90
<b>III.4. Démarche à suivre.....</b>	<b>92</b>
III.4.1. Cas général.....	92
III.4.2. Cas particulier.....	92
<b>III.5. Validation.....</b>	<b>94</b>
III.5.1. Validation semi-analytique.....	94
III.5.2. Validation sur un dispositif industriel: le moteur Lavet.....	98
<b>III.6. Conclusions.....</b>	<b>99</b>

<b>PARTIE B.....</b>	<b>105</b>
<b>PROBLEME MAGNETODYNAMIQUE</b>	
 <b>Chapitre IV.....</b>	 <b>109</b>
<b>Présentation des formulations existantes</b>	
 <b>IV.1. Introduction.....</b>	 <b>109</b>
<b>IV.2. Formulations basées sur le potentiel vecteur magnétique.....</b>	<b>109</b>
IV.2.1. Formulations à tension imposée.....	109
IV.2.1.1. Formulation $AV-A$ .....	110
IV.2.1.2. Formulation $AV-f-f_r$ .....	110
IV.2.1.3. Formulation $AV-A-f-f_r$ .....	111
IV.2.1.4. Formulation $A^*-f-f_r$ .....	111
IV.2.2. Formulation à courant total imposé.....	111
IV.2.3. Résumé.....	113
<b>IV.3. Formulations basées sur le potentiel vecteur électrique.....</b>	<b>113</b>
IV.3.1. Formulations à courant total imposé.....	113
IV.3.1.1. Formulation $Tf-f$ .....	114
IV.3.1.2. Formulation $TT_{\theta f}-T_{\theta f}$ .....	114
IV.3.2. Formulation à tension imposée.....	115
IV.3.3. Résumé.....	115
<b>IV.4. Démarche à développer.....</b>	<b>115</b>
 <b>Chapitre 5.....</b>	 <b>119</b>
<b>Problème magnétodynamique à courant total imposé</b>	
 <b>V.1. Introduction.....</b>	 <b>119</b>
<b>V.2. Problème type et formulation à courant total imposé .....</b>	<b>119</b>
V.2.1. Problème type.....	119
V.2.2. Formulation à courant total imposé.....	120
V.2.2.1. Cas magnétodynamique.....	121

<i>V.2.2.2. Cas magnétostatique</i> .....	121
<b>V.3. Calcul de <math>T_0</math></b> .....	122
V.3.1. Méthodes existantes.....	122
<i>V.3.1.1. Cas des conducteurs bobinés</i> .....	122
<i>V.3.1.2. Cas des conducteurs massifs</i> .....	124
<i>V.3.1.3. Discussions</i> .....	125
V.3.2. Méthodes proposées.....	126
<i>V.3.2.1. Conducteurs bobinés quelconques</i> .....	126
<i>V.3.2.2. Conducteurs massifs quelconques</i> .....	127
<i>V.3.2.3. Conducteurs massifs plans</i> .....	128
V.3.3. Synthèse du calcul de $T_0$ .....	129
V.3.4. Résumé.....	130
<b>V.4. Démarche tenant compte du problème de connexité</b> .....	131
V.4.1. Cas général.....	131
V.4.2. Cas présentant une symétrie.....	132
<b>V.5. Validation</b> .....	132
V.5.1. Comparaison avec un cas axisymétrique.....	133
V.5.2. Micro bobine.....	134
<b>V.6. Conclusions</b> .....	135
 <b>Chapitre 6</b> .....	 141
<b>Problème magnétodynamique à tension imposée</b>	
 <b>VI.1. Introduction</b> .....	 141
<b>VI.2. Couplage entre équations de champ et de circuits électriques</b> .....	142
VI.2.1. Problème type.....	142
VI.2.2. Méthodes de couplage existantes.....	142
<i>VI.2.2.1. Couplage indirect</i> .....	143
<i>VI.2.2.2. Méthode intégrro-différentielle</i> .....	143
<i>VI.2.2.3. Résolution simultanée</i> .....	145
<i>VI.2.2.4. Choix à effectuer</i> .....	145
VI.2.3. Nécessité des relations de circuit.....	146

<b>VI.3. Résolution simultanée dans le cas des bobines filaires</b> .....	146
VI.3.1. Equations de la formulation.....	146
VI.3.2. Relation de circuit .....	147
<i>VI.3.2.1. Expression de la relation de circuit.....</i>	147
<i>VI.3.2.2. Flux magnétique traversant les bobines filaires.....</i>	147
VI.3.3. Forme matricielle de la formulation.....	148
VI.3.4. Prise en compte du problème de connexité par une coupure.....	148
VI.3.5. Démarche à suivre.....	150
<b>VI.4. Résolution simultanée dans le cas des bobines massives</b> .....	150
VI.4.1. Equations de la formulation.....	150
<i>VI.4.1.1. Calcul électrocinétique préliminaire.....</i>	150
<i>VI.4.1.2. Equations du champ magnétique.....</i>	151
VI.4.2. Relation entre le courant total et la tension .....	153
<i>VI.4.2.1. Construction à partir de <math>j_{0k}</math>.....</i>	153
<i>VI.4.2.2. Construction à partir de la relation en potentiel vecteur magnétique.....</i>	155
VI.4.3. Prise en compte du problème de connexité.....	156
VI.4.4. Démarche à suivre.....	157
<b>VI.5. Validation.....</b>	157
<b>VI.6. Conclusions</b> .....	159

<b>PARTIE C.....</b>	163
----------------------	-----

## **MISE EN OEUVRE ET VALIDATION**

<b>Chapitre 7.....</b>	167
------------------------	-----

### **Automatisation de la mise en oeuvre de la démarche**

<b>VII.1. Introduction.....</b>	167
<b>VII.2. Automatisation de la démarche.....</b>	167
VII.2.1. Nécessité de l'automatisation.....	167
VII.2.2. Méthodes existantes.....	168



<i>VII.2.2.1. Programmation structurée figée.....</i>	168
<i>VII.2.2.2. Langage dédié de haut niveau.....</i>	169
<i>VII.2.2.3. Choix à effectuer.....</i>	170
VII.2.3. Quelques langages dédiés à un environnement .....	170
<b>VII.3. Mécanisme du langage dédié .....</b>	172
VII.3.1. Nos attentes .....	172
VII.3.2. Syntaxe des commandes de base.....	172
VII.3.3. Automatisation des applications complexes.....	174
<b>VII.4. Réalisation informatique du langage.....</b>	175
VII.4.1. Etat des lieux.....	175
VII.4.2. Démarche souhaitée .....	176
VII.4.3. Gestion récursive des exécutions en couches .....	176
VII.4.4. Gestion de la mémoire .....	176
VII.4.5. Gestion des paramètres.....	177
<b>VII.5. Descriptif du langage.....</b>	180
VII.5.1. Commandes de base.....	180
VII.5.2. Commandes propres à la mise en oeuvre de notre démarche.....	181
<b>VII.6. Validation.....</b>	182
VII.6.1. Exemple simple.....	182
VII.6.2. Ralentisseur magnétique.....	183
<b>VII.7. Conclusions .....</b>	186
 <b>Chapitre 8.....</b>	191
<b>Vers la modélisation d'un moteur à réluctance variable</b>	
 <b>VIII.1. Introduction.....</b>	191
<b>VIII.2. Grandes lignes du moteur à réluctance variable.....</b>	191
VIII.2.1. Description du moteur à réluctance variable.....	191
<i>VIII.2.1.1. Principe de fonctionnement.....</i>	191
<i>VIII.2.1.2. Schéma du circuit.....</i>	192
VIII.2.2. Considération symétrique.....	193
VIII.2.3. Hypothèses .....	193

<b>VIII.3. Réalisation informatique</b> .....	193
VIII.3.1. Etat des lieux .....	193
VIII.3.2. Objectifs .....	193
VIII.3.3. Analyse des besoins .....	194
VIII.3.4. Structure de données utilisée .....	194
<b>VIII.4. Prise en compte des composants électroniques</b> .....	195
VIII.4.1. Mise en équations des circuits électriques .....	196
VIII.4.2. Comportement non linéaire des diodes.....	198
VIII.4.3. Prise en compte des sources de tension.....	199
<b>VIII.5. Prise en compte du comportement dynamique</b> .....	199
VIII.5.1. Méthode en pas à pas dans le temps.....	200
VIII.5.2. Mise en équations du problème.....	200
VIII.5.3. Amélioration de la renumérotation des variables .....	201
<b>VIII.6. Prise en compte du mouvement</b> .....	202
VIII.6.1. Mobilité du maillage.....	203
VIII.6.2. Méthode de substitution des variables.....	203
<b>VIII.7. Validation numérique</b> .....	203
VIII.7.1. Contacteur non linéaire.....	204
VIII.7.2. Moteur à réluctance variable linéaire .....	206
<b>VIII.7. Conclusions</b> .....	207
 <b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	 211
 <b>ANNEXE</b> .....	 215
<b>Rangement des matrices</b>	

## TABLE DES FIGURES

Figure I.1. Problème type de la partie A.....	33
Figure I.2. Sphère perméable immergée dans un champ uniforme $\mathbf{H}_s$ .....	36
Figure I.3. Choix de méthode.....	42
Figure I.4. Ligne à intégrer et point de référence O.....	45
Figure I.5. Géométrie du problème considéré: vue 3D, vue horizontale et vue verticale avec bobines.....	46
Figure I.6. Taches d'erreurs sur la frontière supérieure .....	46
Figure I.7. Distribution en relief de $f$ sur la frontière supérieure.....	46
Figure I.8. Co-branche d'une longue série de branches.....	47
Figure I.9. Géométrie du problème simplifié.....	49
Figure I.10. Régions de couplage et conditions aux limites.....	49
Figure I.11. Conditions aux limites.....	49
Figure I.12. Géométrie du problème N°13 .....	51
Figure I.13. Maillage du problème N°13.....	51
Figure I.14. Caractéristiques du matériau non linéaire.....	51
Figure I.15. Comparaison des méthodes sur les valeurs de l'induction dans la plaque en fer	53
Figure I.16. Support AB des points de calcul de l'induction dans l'air.....	53
Figure I.17. Distribution de la norme de l'induction dans l'air.....	54
Figure I.18. Saturation du matériau.....	54
Figure I.19. Distribution de $\mathbf{B}$ et $f$ dans les régions perméables.....	54
Figure I.20. Schéma du choix de méthode.....	55
Figure II.1. Ensemble complexe des conditions aux limites du ralentisseur.....	65
Figure II.2. Schéma du choix de la méthode.....	71
Figure II.3a. Contribution de tous les inducteurs.....	72
Figure II.3b. Réduction des inducteurs.....	72
Figure II.4a. Modèle infiniment périodique comportant tous les inducteurs.....	73
Figure II.4b. Modèle comportant un nombre suffisant d'inducteurs .....	73
Figure II.4c. Modèle avec une seule période.....	73
Figure II.5. Géométrie et maillage d'une période .....	74
Figure II.6. Ensemble de frontières.....	74
Figure II.7a. Modèle à 8 bobines.....	75
Figure II.7b. Modèle à 1 bobine .....	76
Figure II.7c. Modèle à 1/2 bobine .....	76

Figure II.8. Support de calcul de $Df$ pour les modèles à 8, 1 et 1/2 bobines.....	76
Figure II.9. Distribution de $Df$ pour les modèles à 8, 1 et 1/2 bobines.....	77
Figure II.10. Distribution de $f$ dans le pôle et l'épanouissement.....	77
Figure II.11. Distribution de $f$ dans l'induit.....	77
Figure III.1. Tore ferromagnétique fermé et champ magnétique non négligeable.....	83
Figure III.2. Illustration du problème de connexité en potentiel scalaire total.....	84
Figure III.3. Imposition de la continuité du potentiel dans les éléments classiques.....	86
Figure III.4. Autorisation de la discontinuité du potentiel dans les éléments coques.....	87
Figure III.5. Domaine étudié du dysfonctionnement éventuel du maillage.....	88
Figure III.6. Recherche par voisinage dont la facette de jonction se trouve dans le fer.....	88
Figure III.7. Recherche par voisinage dont la facette de jonction se trouve dans l'air.....	89
Figure III.8a. Percement d'une facette de B.....	90
Figure III.8b. Mise à jour de B, I et percement de 2 autres facettes de B.....	90
Figure III.8c. Mise à jour de B, I et percement de 2 autres facettes de B.....	90
Figure III.8d. Mise à jour de B, I et percement de 3 autres facettes de B.....	90
Figure III.8e. Mise à jour de B, I et percement de 2 autres facettes de B.....	90
Figure III.8f. Mise à jour de B, I et percement de 2 autres facettes de B.....	90
Figure III.8g. Mise à jour de B, I et percement d'une autre facette de B.....	90
Figure III.8h. Mise à jour de B et surface de coupure.....	90
Figure III.9. Géométrie de la région multiplement connexe.....	90
Figure III.10. Illustration des conditions aux limites concernant la coupure.....	91
Figure III.11. Problème type en cas général.....	92
Figure III.12. Couplage, coupure et contrainte ponctuelle en cas général.....	92
Figure III.13. Problème type de la démarche dans le cas particulier.....	93
Figure III.14. Conditions flottantes et contrainte ponctuelle de $f_r$ .....	93
Figure III.15. Condition de couplage, conditions linéiques de $Df$ et contrainte ponctuelle de $Df$ .....	93
Figure III.16. Vue globale du problème.....	94
Figure III.17. Géométrie 3D et vue horizontale de la région perméable.....	95
Figure III.18. Distribution de $f$ utilisant une coupure explicite.....	95
Figure III.19. Distribution de $f$ utilisant une coupure implicite.....	95
Figure III.20. Comparaison quantitative entre la méthode semi-analytique et les méthodes proposées.....	97
Figure III.21. Géométrie du moteur Lavet .....	98
Figure III.22. Distribution de $Df$ à l'interface de couplage .....	98

Figure III.23. Saturation du stator.....	98
Figure III.24. Distribution du potentiel total .....	98
Figure IV.1. Conducteur k et ses contraintes.....	112
Figure V.1. Problème type du problème à courant total imposé.....	120
Figure V.2. Définitions géométriques de $W_o$ et $G_o$ .....	123
Figure V.3. Bobine plane.....	123
Figure V.4. Géométrie de la bobine et distribution de $T_0$ .....	124
Figure V.5. Conducteur de forme quelconque.....	126
Figure V.6. Région conductrice, trou et interface $G_o$ .....	126
Figure V.7. Contraintes aux bornes du conducteur.....	127
Figure V.8. Conditions aux limites de V aux bornes du conducteur.....	128
Figure V.9. Illustration du trou $W_t$ et la frontière « extérieure » $G_{oext}$ du conducteur plan	129
Figure V.10. Distribution de $T_0$ du conducteur plan massif.....	129
Figure V.11. Schéma de synthèse du calcul de $T_0$ .....	130
Figure V.12. Méthodes adoptées pour le calcul de $T_0$ .....	130
Figure V.13. Géométrie et maillage du problème.....	133
Figure V.14. Dimension de la géométrie du cas de validation axisymétrique.....	133
Figure V.15. Module de la densité de courant sur AB.....	134
Figure V.16. Description de la micro bobine.....	134
Figure V.17. Maillage de la micro bobine.....	135
Figure V.18. Distribution du module de la densité de courant dans la micro bobine.....	135
Figure VI.1. Problème type alimenté par une source de tension.....	142
Figure VI.2. Structure topologique d'une matrice creuse symétrique.....	144
Figure VI.3. Structure de la matrice utilisant la méthode intégral-différentielle.....	144
Figure VI.4. Choix de la méthode de couplage.....	145
Figure VI.5. Manque de la relation de circuit.....	146
Figure VI.6. Problème type dans le cas des bobines massives.....	150
Figure VI.7. Géométrie du problème.....	158
Figure VI.8. Dimensions du problème.....	158
Figure VI.9. Interface de couplage .....	158
Figure VII.1. Bloc d'activation de la pile.....	177
Figure VII.2. Structure des paramètres.....	179
Figure VII.3. Réservoirs pour les paramètres.....	179
Figure VII.4. Géométrie et maillage du ralentisseur.....	183
Figure VIII.1a. Culasse et rotor du moteur à réluctance variable.....	192

Figure VIII.1b. Partie ferromagnétique et bobines du moteur.....	192
Figure VIII.2. Circuit d'alimentation du moteur.....	192
Figure VIII.3. Structure des données réalisée.....	194
Figure VIII.4. Bobine filaire et son trou pour le calcul de $T_0$ .....	195
Figure VIII.5. Circuit équivalent d'une diode réelle.....	199
Figure VIII.6. Renumérotation des variables de la matrice.....	202
Figure VIII.7. Maillage du moteur à réluctance variable.....	202
Figure VIII.8. Avancement du rotor.....	203
Figure VIII.9. Géométrie du noyau UI avec bobinage.....	204
Figure VIII.10. Courbe $B(H)$ du matériau utilisée.....	204
Figure VIII.11. Schéma électrique d'alimentation de la bobine.....	205
Figure VIII.12. Comparaison avec la formulation $AV$ .....	205
Figure VIII.13. Comparaison avec un modèle linéaire on $AV$ .....	206
Figure VIII.14. Comparaison avec la mesure.....	206
Figure VIII.15. Position du rotor concernant le courant maximal.....	207
Figure A.1. Matrice creuse symétrique et son profil.....	215

## NOMENCLATURE

<b>A</b>	potentiel vecteur magnétique
<b>A<sup>*</sup></b>	potentiel vecteur magnétique modifié
<b>V</b>	potentiel scalaire électrique
<b>U</b>	tension
<b>U<sub>k</sub></b>	tension imposée aux bornes $S_{k0}$ et $S_{k1}$ du conducteur k
<b>S<sub>k0</sub></b>	borne à densité de courant tangentielle nulle
<b>S<sub>k1</sub></b>	borne à densité de courant tangentielle nulle
<b>S<sub>k2</sub></b>	borne à densité de courant normale nulle
<b>B</b>	induction magnétique
<b>B<sub>r</sub></b>	induction rémanente
<b>E</b>	champ électrique
<b>T</b>	potentiel vecteur électrique
<b>T<sub>0</sub></b>	potentiel vecteur électrique auxiliaire
<b>t<sub>0k</sub></b>	<b>T<sub>0</sub></b> dans le cas où $I_k = 1$ A
<b>T<sub>0</sub></b>	potentiel scalaire électrique auxiliaire
<b>H</b>	champ magnétique
<b>H<sub>s</sub></b>	champ source
<b>H<sub>m</sub></b>	réaction du circuit magnétique due à l'existence de <b>H<sub>s</sub></b>
<b>H<sub>j</sub></b>	champ source calculé par la loi Biot-Savart
<b>J</b>	densité de courant
<b>J<sub>s</sub></b>	densité de courant effective
<b>J<sub>0</sub></b>	densité de courant destinée à calculer <b>T<sub>0</sub></b>
<b>j<sub>0k</sub></b>	densité de courant liée à <b>t<sub>0k</sub></b>
<b>U<sub>pn</sub></b>	tension à l'interface p-n de la diode
<b>N<sub>i</sub></b>	fonction de pondération
<b>R<sub>k</sub></b>	résistance électrocinétique du conducteur k
<b>I</b>	courant total
<b>I<sub>k</sub></b>	courant total parcourant le conducteur k
<b>S<sub>k</sub></b>	interface du conducteur k
<b>Γ<sub>H</sub></b>	interface à champ magnétique tangentiel nul
<b>Γ<sub>B</sub></b>	interface à induction magnétique normale nulle
<b>Γ<sub>k</sub></b>	interface de l'ensemble $\Omega_{kc}$ et $\Omega_{kt}$
<b>φ</b>	potentiel scalaire total
<b>φ<sup>+</sup></b>	potentiel scalaire total 'au dessus' de l'élément coque
<b>φ<sup>-</sup></b>	potentiel scalaire total 'au dessous' de l'élément coque
<b>φ<sub>r</sub></b>	potentiel scalaire réduit
<b>φ<sub>g</sub></b>	potentiel scalaire généralisé
<b>φ<sub>0</sub></b>	potentiel scalaire associé au <b>T<sub>0</sub></b>

$\Delta\phi$	potentiel scalaire source du à $\mathbf{H}_j$
$\Delta\phi^+$	potentiel scalaire source 'au dessus' de l'élément coque
$\Delta\phi^-$	potentiel scalaire source 'au dessous' de l'élément coque
$\Delta\phi_0$	potentiel scalaire source du à $\mathbf{T}_0$
$\Omega$	domaine d'étude
$\Omega_1$	région perméable
$\Omega_2$	région d'air
$\Omega_k$	conducteur k
$\Omega_c$	région conductrice
$\Omega_t$	trou qui bouche $\Omega_c$
$\Omega_r$	le reste du domaine
$\Gamma_{12}$	interface entre $\Omega_1$ et $\Omega_2$
$\psi$	potentiel nodal intégré dans le temps
$\alpha$	coefficient de prédiction
$\beta$	coefficient de compatibilité
$\Phi_k$	flux traversant la bobine k
$\alpha_i$	fonction d'interpolation
$\mu_r$	perméabilité relative
$\rho$	résistivité
$\sigma$	conductivité





## **INTRODUCTION GENERALE**



## INTRODUCTION GENERALE

### *Méthode des éléments finis*

Pour modéliser les problèmes de milieux continus, de nombreuses méthodes numériques ont été développées. Parmi celles ci, les plus connues sont la méthode d'équations intégrales volumiques, la méthode d'équations intégrales de frontière, la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies.

Parmi ces méthodes numériques, la méthode des éléments finis est apparue comme une technique appropriée à la conception électromagnétique, à l'évaluation de performance et à l'optimisation d'appareils dans les applications en basse fréquence.

### *Formulation électromagnétique*

Pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques en trois dimensions par la méthode des éléments finis, les formulations électromagnétiques jouent un rôle important sur le coût et la qualité du calcul. Ces formulations sont basées soit sur le potentiel vecteur magnétique, soit sur le potentiel scalaire magnétique, ou sur les champs eux mêmes.

Le potentiel vecteur magnétique procure un moyen de calcul robuste et précis. Il maximise cependant le nombre d'inconnues du système algébrique à résoudre et le problème de jauge se pose. Par ailleurs, il reste un certain nombre de difficultés à résoudre: problèmes de jauge et de précision pour une discrétisation en éléments finis nodaux, convergence de la résolution du système matriciel dans le cas d'une représentation par des éléments mixtes. Ces aspects font l'objet de la thèse de C. Golovanov, menée en même temps que ce travail.

Parallèlement, l'approche en potentiel scalaire magnétique semble aussi extrêmement attrayante. Le potentiel scalaire magnétique réduit considérablement l'effort de calcul par rapport au potentiel vecteur magnétique, car une seule variable par noeud est nécessaire dans les régions dépourvues de courant. L'intérêt sera plus évident lorsque le courant ne parcourt qu'une partie mineure du domaine. De plus, l'imposition d'une jauge n'est pas nécessaire dans ce type de démarche. L'utilisation du potentiel scalaire magnétique est pourtant un enjeu important vu qu'il reste des limites dont il faut s'affranchir pour atteindre la performance du potentiel vecteur magnétique.

Cette thèse a pour but de mettre en valeur les avantages du potentiel scalaire magnétique dans diverses applications. L'utilisation de ce potentiel posera naturellement la question suivante:

*En repoussant des limites du potentiel scalaire magnétique, est il possible de lui donner la même généralité que le potentiel vecteur magnétique ?*

### *Limites du potentiel scalaire magnétique*

L'utilisation du potentiel scalaire magnétique pose des problèmes de précision que le potentiel vecteur magnétique peut naturellement prendre en compte: dans les régions perméables et dans les circuits magnétiques fermés, la modélisation en potentiel scalaire peut donner des résultats imprécis.

Par ailleurs, le potentiel scalaire magnétique est mal adapté aux problèmes dynamiques dont les régions conductrices sont alimentées par un courant total non nul. Jusqu'à présent la prise en

compte des courants induits par une formulation en potentiel scalaire magnétique dans un problème magnétique couplé avec un circuit électrique reste encore un problème délicat à résoudre.

Enfin, malgré son aspect économique, le potentiel scalaire magnétique est souvent difficile à manipuler et demande une bonne habileté pour mener à bien la démarche de modélisation.

### *Objectifs de la thèse*

Tenant compte des limites mentionnées et utilisant le potentiel scalaire magnétique, le premier but de cette thèse est d'améliorer la précision dans les régions perméables et dans les circuits magnétiques fermés. Ensuite pour modéliser les problèmes dynamiques par le potentiel scalaire magnétique, la prise en compte du courant total imposé est développée. En outre le couplage avec le circuit électrique d'alimentation, souvent nécessaire dans la pratique, est également étudiée. Enfin, l'automatisation de la mise en oeuvre de la démarche complexe est effectuée pour faciliter l'utilisation pratique.

### *Structure de la thèse*

Pour atteindre ces objectifs, la thèse est décomposée en 3 parties contenant 8 chapitres.

La première partie est consacrée à l'amélioration de la précision dans les problèmes magnétostatiques. Il s'agit de trois chapitres qui traitent des problèmes rencontrés.

Le premier chapitre a pour but d'améliorer la précision dans les régions perméables en utilisant le potentiel scalaire magnétique. Après avoir étudié les méthodes existantes, la formulation en double potentiel est retenue, ce qui conduit à étudier le calcul du couplage entre ces deux potentiels. Là encore, un choix de méthode de couplage est effectué pour retenir finalement la méthode variationnelle.

L'introduction des conditions de couplage fait apparaître des relations entre des variables nodales. L'élimination « en ligne » et locale des variables contraintes n'est plus adaptée, et il est donc nécessaire de disposer d'un autre moyen pour traiter les conditions aux limites. Le deuxième chapitre développe ainsi une méthode robuste pour gérer un ensemble complexe de conditions aux limites possédant probablement des relations intervariables.

Le troisième chapitre traite du problème de connexité dans les circuits magnétiques fermés en utilisant le potentiel scalaire total. Afin d'autoriser la discontinuité du potentiel scalaire total, l'introduction d'une coupure ayant un saut de potentiel dans la région multiplement connexe est mise en oeuvre. C'est une méthode adaptée à nos besoins qui permet de prendre en compte la topologie multiplement connexe de la géométrie tout en conservant la précision de calcul.

La deuxième partie cherche à formuler les problèmes magnétodynamiques à l'aide du potentiel scalaire magnétique. Elle est constituée des chapitres IV, V et VI.

Le quatrième chapitre donne une vue globale sur les formulations dédiées aux problèmes magnétodynamiques. Le modèle peut être alimenté soit par source de courant soit par source de tension. Nous retenons la formulation en potentiel scalaire magnétique associé au potentiel vecteur électrique pour le développement de la suite de l'exposé.

Le cinquième chapitre est consacré à la modélisation des problèmes magnétodynamiques à

courant total imposé tout en conservant l'utilisation du potentiel scalaire magnétique. Le courant total est représenté par un potentiel  $T_0$  dont le calcul est développé dans le cas des conducteurs massifs et bobinés. La formulation  $TT_0\Omega$  est mise en oeuvre et validée.

En réalité, le courant total n'est pas toujours connu au préalable, et sa valeur dépend forcément des paramètres du circuit électrique extérieur. Le sixième chapitre cherche à prendre en compte le circuit d'alimentation en résolvant simultanément les équations de champ et de circuit électrique. Jusqu'à présent, l'utilisation du potentiel scalaire magnétique était limitée aux problèmes contenant des conducteurs bobinés par manque de relation de circuit dans le cas des conducteurs massifs, relation que nous établissons au sein de ce chapitre. La méthode proposée est alors applicable désormais pour tous les cas existants de conducteurs.

La dernière partie est consacrée à la mise en oeuvre et à la validation. Elle se compose des chapitres VII et VIII.

La démarche adoptée est souvent difficile à manipuler et peut se dérouler en plusieurs étapes. Il est nécessaire de l'automatiser pour faciliter la tâche de l'utilisateur. Le septième chapitre développe une méthode d'automatisation alliant souplesse et efficacité à l'aide du langage dédié de haut niveau.

Enfin, le dernier chapitre montre la faisabilité de l'utilisation du potentiel scalaire magnétique dans un cas réel du moteur à réluctance variable dans lequel le champ magnétique est couplé avec le circuit électrique comportant des composants électroniques en présence du mouvement de rotor.



PARTIE A

# **PROBLEME MAGNETOSTATIQUE**





## Partie A. Problème magnétostatique

### *Introduction*

Dans l'objectif de modéliser les problèmes tridimensionnels avec précision à un coût raisonnable, le potentiel scalaire magnétique est très attrayant et semble préférable au potentiel vecteur magnétique.

Le potentiel vecteur magnétique est performant dans la plupart des problèmes en trois dimensions même si chaque noeud du maillage possède alors trois variables nodales, ce qui maximise le nombre d'inconnues du système algébrique à résoudre. Cependant, il est désormais connu que la jauge qui est associée au potentiel vecteur magnétique a des effets pervers en particulier sur la qualité du calcul.

Du fait que dans la formulation en potentiel scalaire magnétique chaque noeud ne possède qu'une seule variable nodale et que l'unicité est assurée sans l'introduction d'une jauge, l'utilisation du potentiel scalaire magnétique devient extrêmement intéressante. Le gain en temps de calcul est encore plus important lorsque la plupart des régions sont dépourvues de courant. Malheureusement, dans les régions perméables et dans les circuits magnétiques fermés, la précision est éventuellement trop détériorée pour que les résultats obtenus puissent être exploitables.

### *Structure de la partie*

Le but de la partie est de chercher une solution permettant d'améliorer la précision de la formulation en potentiel scalaire magnétique dans les régions perméables et dans les circuits magnétiques fermés.

Pour cela, la partie dispose de trois chapitres.

Le premier chapitre apporte une réponse aux problèmes d'imprécision dans les régions perméables. Il traite également la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique aux interfaces avec les régions non perméables en effectuant un calcul de couplage.

L'introduction du couplage rend interdépendantes les conditions aux limites à gérer et une génération robuste des conditions aux limites doit nécessairement être mise en oeuvre. Le deuxième chapitre est consacré à développer cette construction tout en prenant soin de l'efficacité et l'économie de la démarche. Bien que le but initial ne concernant que le couplage, cette méthode de traitement des conditions aux limites est un outil indispensable tout au long de la thèse.

Le troisième chapitre cherche à résoudre le problème d'imprécision dans les circuits magnétiques fermés dit problème de connexité.

*Hypothèses*

Afin de favoriser la clarté de la partie, l'étude est menée dans le cadre du fonctionnement magnétostatique. Cette restriction nous permet de concentrer nos efforts sur l'aspect fondamental de l'amélioration de la précision. Dans notre démarche, les matériaux peuvent avoir un comportement magnétique non linéaire et les grandeurs physiques sont indépendantes du temps. De plus, les phénomènes d'hystérésis sont négligés.

## CHAPITRE I

# **AMELIORATION DE LA PRECISION DANS LES REGIONS PERMEABLES**



## Chapitre I: Amélioration de la précision dans les régions perméables

### Question du chapitre

*En utilisant le potentiel scalaire magnétique, est-ce que l'on peut améliorer la précision du calcul dans les régions perméables tout en considérant l'existence des courants et de la continuité tangentielle du champ magnétique ?*

### Démarche directrice

*En utilisant la formulation en potentiels réduit et total, la précision dans les régions perméables est assurée et les courants sont pris en compte. La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est conservée à l'aide de la méthode variationnelle.*

### I.1. Introduction

Le prix à payer en regard du faible coût du potentiel scalaire magnétique est que la précision dans les régions perméables peut considérablement se détériorer [Simkin-79]. Durant les dernières décennies, plusieurs recherches suscitées par cet enjeu ont été effectuées [Simkin-79] [McDaniel-83] [Webb-89] [Mayergoyz-87] [Gyimesi-92] [Gyimesi-93].

En faisant un tour d'horizon des solutions existantes, un choix pertinent nous mène à retenir la formulation en potentiels total et réduit. Cette démarche requiert pourtant un calcul supplémentaire de couplage pouvant lui aussi être calculé par différentes méthodes [Simkin-79] [Krähenbühl-88]. Nous retiendrons la méthode variationnelle pour le calcul de couplage.

Le choix d'une résolution par couplage de variables d'état complique nécessairement la tâche de l'utilisateur. Une systématisation de la démarche est donc proposée, premier pas vers une automatisation. Le problème test international N° 13 du TEAM Workshop a servi de support de validation de la méthode [Nakata-93] [Golovanov-95].

### I.2. Problème Type

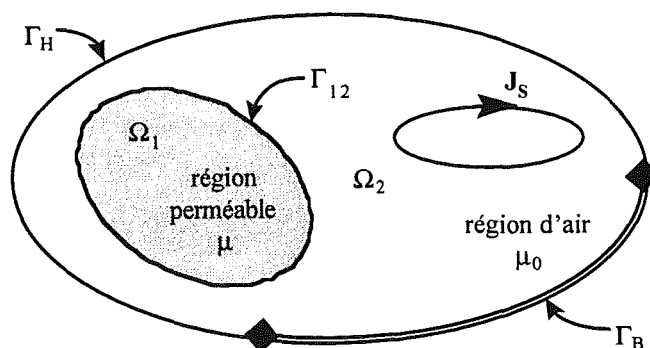


Figure I.1. Problème type de la partie A

Pour une bonne compréhension du déroulement de la partie, le problème type doit être clairement défini. Le problème type de la figure I.1 est constitué de manière schématique par l'ensemble des différents domaines physiques susceptibles d'être rencontrés dans un dispositif réel. Dans le cadre des hypothèses de cette partie, il est suffisant de distinguer deux types de régions: l'ensemble des régions perméables  $\Omega_1$  et la région d'air  $\Omega_2$ . La région perméable dépourvue de courant peut avoir un comportement ferromagnétique non linéaire. La région d'air constitue la boîte d'air prise suffisamment grande pour que ses frontières puissent être considérées comme l'infini. Elle comprend des bobines inductrices parcourues par un système de courants  $\mathbf{J}_s$ .

Pour la cohérence des termes utilisés, quelques notations communes sont définies dans le problème type:  $\Gamma_{12}$  est l'interface entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ,  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_B$  sont les interfaces où le champ magnétique tangentiel et l'induction magnétique normale sont nuls, respectivement.

Mathématiquement, les relations sur  $\Gamma_B$  et  $\Gamma_H$  se traduisent par

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (\text{I.1})$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B \quad (\text{I.2})$$

### I.3. Problème d'imprécision

Compte tenu du courant dans le problème traité, la formulation souhaitée en potentiel scalaire magnétique doit contenir un terme irrotationnel. La présence de ce terme conduit généralement à un problème d'imprécision dans les régions à perméabilité élevée en utilisant le potentiel scalaire.

#### I.3.1. Formulation « souhaitée »

En vue de modéliser le problème magnétostatique contenant le courant, le champ magnétique doit s'exprimer sous la forme suivante:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m \quad (\text{I.3})$$

dans lequel  $\mathbf{H}_s$  est le champ source calculé au préalable dont le rotationnel représente la densité effective de courant  $\mathbf{J}_s$  et  $\mathbf{H}_m$  est la réaction du circuit magnétique dû à l'existence de  $\mathbf{H}_s$ :

$$\text{rot } \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.4})$$

Dans le cas magnétostatique, la première équation de Maxwell s'écrit

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.5})$$

$$\text{alors } \text{rot } \mathbf{H}_m = \mathbf{0} \quad (\text{I.6})$$

Le champ  $\mathbf{H}_m$  peut être décrit comme gradient du potentiel scalaire magnétique  $\Omega$

$$\mathbf{H}_m = - \text{grad } \Omega \quad (\text{I.7})$$

Donc, la formulation souhaitée qui est à la fois générale et économique prend la forme suivante

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad } \Omega \quad (\text{I.8})$$

La formulation en potentiel scalaire réduit est un exemple de la forme souhaitée. Son principe consiste à décomposer le champ magnétique en un champ  $\mathbf{H}_j$  dû aux courants sources dans un espace vide et un champ  $-\text{grad } \phi_r$  exprimant la réaction des régions magnétiques au champ  $\mathbf{H}_j$ .

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j - \text{grad } \phi_r \quad (\text{I.9})$$

dans lequel  $\phi_r$  est potentiel scalaire magnétique réduit et  $\mathbf{H}_j$  est calculé par la loi de Biot-Savart

$$\mathbf{H}_j(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}_s \times \frac{\mathbf{M}\mathbf{M}'}{M M^3} d\Omega \quad (\text{I.10})$$

### I.3.2. Mise en évidence pratique du problème d'imprécision

L'utilisation de la formulation souhaitée dans les régions perméables entraîne malheureusement un problème d'imprécision: l'erreur relative du champ total  $\mathbf{H}$  croît considérablement.

#### *Erreur relative*

Afin de clarifier l'analyse de l'erreur relative, nous avons défini deux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  qui sont respectivement les coefficients de prédiction et de compatibilité.

Rappelons que dans la formulation souhaitée le champ magnétique prend la forme:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m \quad (\text{I.11})$$

Le coefficient de prédiction  $\alpha$  représente la qualité de prédiction de  $\mathbf{H}_s$  par rapport à  $\mathbf{H}$  en valeur absolue. Plus le champ  $\mathbf{H}_s$  est proche au champ réel  $\mathbf{H}$ , plus  $\alpha$  est faible. La définition de  $\alpha$  est

$$\alpha = H_m/H \quad (\text{I.12})$$

Le coefficient de compatibilité  $\beta$  représente la compatibilité entre  $\mathbf{H}_s$  et  $\mathbf{H}_m$ . En remarquant que dans un calcul « compatible » entre  $\mathbf{H}_s$  et  $\mathbf{H}_m$  l'erreur d'arrondi  $\Delta\mathbf{H} = \Delta\mathbf{H}_s + \Delta\mathbf{H}_m$  est très faible, nous avons également défini  $\beta$  par relation suivante

$$\Delta\mathbf{H} = \beta \Delta\mathbf{H}_m \quad (\text{I.13})$$

A la limite, si  $\mathbf{H}_s$  et  $\mathbf{H}_m$  sont absolument compatibles,  $\Delta\mathbf{H}$  s'annulera, donc  $\beta = 0$ .

A l'aide de  $\alpha$  et  $\beta$ , l'erreur relative sur  $\mathbf{H}$  est facilement déduite:

$$\Delta\mathbf{H}^* = \frac{\Delta\mathbf{H}}{\mathbf{H}} = \frac{\alpha\beta\Delta\mathbf{H}_m}{\mathbf{H}_m} = \alpha\beta\Delta\mathbf{H}_m^* \quad (\text{I.14})$$



Dans les régions perméables, le champ  $\mathbf{H}$  est très faible, ce qui conduit à un coefficient  $\alpha$  très élevé, car  $\alpha = H_m/H$ . Dans ce cas l'erreur relative  $\Delta H_m^*$  commise sera fortement amplifiée avant de donner l'erreur relative  $\Delta H^*$ .

### Exemple quantitatif

Une sphère constituée d'un matériau homogène et isotrope est placée dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\mathbf{H}_s$ . La perméabilité relative de la sphère vaut 1000. Nous pouvons démontrer que le champ magnétique à l'intérieur de la sphère vaut [Bedrosian-91]:

$$\mathbf{H} = 3\mathbf{H}_s / (\mu_r + 2) \quad (\text{I.15})$$

$$\mathbf{H}_m = (1 - \mu_r) \mathbf{H}_s / (\mu_r + 2) \quad (\text{I.16})$$

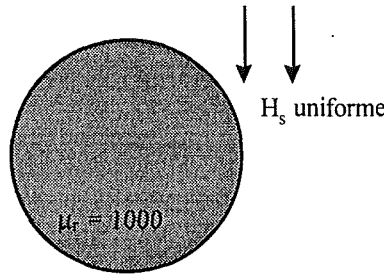


Figure I.2. Sphère perméable immergée dans un champ uniforme  $\mathbf{H}_s$

d'où  $\mathbf{H} = 3\mathbf{H}_m / (1 - \mu_r)$  (I.17)

$$\alpha = H_m / H = (\mu_r - 1) / 3 = 334 \quad (\text{I.18})$$

Supposons que  $\mathbf{H}_s$  soit calculé avec une précision suffisante, ce qui donne  $\Delta H = \Delta H_m$ , donc  $\beta$  vaut 1. Nous avons alors

$$\Delta H^* = \alpha \beta \Delta H_m^* = 334 \Delta H_m^* \quad (\text{I.19})$$

Nous voyons qu'une erreur de 1% de  $H_m$  pourrait créer une erreur de 334% de  $H$  !! Une telle erreur est inacceptable dans la plupart des applications. Nous constatons également que la valeur trop élevée de  $\alpha$  entraîne un effet déplorable sur la précision.

### I.3.3. Solutions pour le problème d'imprécision

#### *I.3.3.1. Analyse générale des solutions*

Vu la relation  $\Delta H^* = \alpha \beta \Delta H_m^*$ , pour améliorer la précision de  $H$  nous pouvons jouer soit sur le coefficient de compatibilité  $\beta$ , soit sur le coefficient de prédiction  $\alpha$ , soit même sur la précision de  $H_m$ . Plus  $\alpha, \beta$  et  $\Delta H_m^*$  sont faibles, plus la précision est améliorée.

La solution directe est d'intervenir sur  $\Delta H_m^*$  en affinant le maillage [McDaniel-83]. Dans les méthodes qui jouent sur  $\beta$ , il existe la méthode utilisant la formulation en potentiel d'arête

[Webb-89] [Golovanov-97]. En considérant que l'erreur d'arrondi peut provenir d'une valeur trop élevée de  $\alpha$ , deux approches principales peuvent être envisagées. Dans la première, un coefficient  $\alpha$  qui vaut 1 est utilisé, c'est le cas des formulations en potentiel scalaire total [Simkin-79] ou différent [Mayergoyz-87]. La deuxième approche consiste à diminuer le plus possible le coefficient  $\alpha$  par la formulation en potentiel scalaire magnétique général [Gyimesi-92] [Gyimesi-93].

Nous allons présenter successivement les formulations mentionnées en vue de déterminer la méthode la mieux adaptée à nos besoins.

#### *1.3.3.2. Solution utilisant le potentiel scalaire réduit [McDaniel-83]*

C'est la méthode la plus simple à appréhender. Le maillage est raffiné pour obtenir une bonne précision de  $\mathbf{H}_m$ , et par conséquent, l'erreur d'arrondi de  $\mathbf{H}$  est également améliorée.

##### *Intérêts*

La démarche est extrêmement simple tant pour le concepteur que pour l'utilisateur parce qu'il n'y a aucun changement de la formulation « souhaitée ».

##### *Inconvénients*

La dépendance de la précision vis à vis du maillage utilisé a un effet défavorable sur la qualité du calcul. L'explosion du nombre de noeuds dégrade les facteurs coût et efficacité de la formulation.

#### *1.3.3.3. Solution utilisant le potentiel scalaire d'arête et l'arbre [Webb-89]*

C'est une méthode qui s'intéresse à diminuer le coefficient de compatibilité  $\beta$  en utilisant des éléments d'arête. Le champ  $\mathbf{H}_s$  est construit par affectation de valeurs convenables sur les arêtes du maillage de telle sorte que la loi d'Ampère soit conservée sur toutes les facettes des éléments. Le champ  $\mathbf{H}_m$  est dérivé d'un calcul scalaire par la méthode variationnelle. Dans cette méthode,  $\mathbf{H}_s$  est approché par les éléments d'arête du premier ordre tandis que  $\mathbf{H}_m$  est approché par les éléments nodaux du premier ordre. La compatibilité des deux représentations donne une faible valeur de  $\beta$ , ce qui permet d'éviter le problème d'imprécision dans les régions perméables.

##### *Intérêts*

La démarche est simple. Elle ne demande ni calcul initial du champ dû aux courants en l'absence de matériaux magnétiques, ni couplage entre les régions de propriétés physiques différentes.

##### *Inconvénients*

L'algorithme utilisé pour modéliser le champ source est un algorithme quelque peu inhabituel pour un code standard éléments finis. D'autre part, la qualité du calcul dépend fortement de l'arbre choisi pour la jauge [Golias-94]. Il semble que le choix optimal de l'arbre est encore un domaine d'étude pour traiter avec sûreté le problème d'imprécision.

#### 1.3.3.4. Solution utilisant le potentiel d'arête et la jauge implicite [Golovanov-97]

C'est une méthode qui cherche également à diminuer le coefficient de compatibilité  $\beta$  en utilisant des éléments d'arête. Le champ  $\mathbf{H}_s$  est calculé par éléments finis d'arête en utilisant une résolution implicitement jaugée en méthode de gradient conjugué. La démarche du calcul de  $\mathbf{H}_m$  est similaire à celle de la méthode précédente, donc la compatibilité obtenue donne également une faible valeur de  $\beta$ . La précision dans les régions perméables est alors améliorée.

##### Intérêts

La précision est assurée sans raffiner excessivement le maillage et sans créer d'arbre dans les arêtes du maillage. Un seul et même potentiel est utilisé pour l'ensemble du domaine d'étude.

##### Inconvénients

La détermination du champ  $\mathbf{H}_s$  pose des difficultés dans le cas où la densité de courant est un terme singulier comme dans le cas des courants filaires.

#### 1.3.3.5. Solution utilisant le potentiel scalaire total [Simkin-79]

Cette méthode s'inscrit parmi les méthodes qui cherchent à éviter une valeur trop importante du coefficient de prédiction  $\alpha$  en imposant  $\alpha = 1$ . Alors, dans les régions perméables

$$H = H_m / \alpha = H_m \quad (I.20)$$

ce qui signifie une disparition du champ source  $\mathbf{H}_s$ .

##### Principe

Le principe de cette méthode consiste à modéliser directement le champ magnétique par le potentiel scalaire total dans les régions perméables et par le potentiel réduit dans les régions non perméables contenant éventuellement les courants.

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (I.21)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j - \text{grad } \phi_r \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (I.22)$$

dans lequel  $\phi$  est le potentiel scalaire magnétique total,  $\mathbf{H}_j$  est le champ source calculé par la loi de Biot-Savart et  $\phi_r$  est le potentiel scalaire magnétique réduit.

Vu la discontinuité du potentiel de part et d'autre de la frontière des régions perméables, un calcul de couplage est introduit pour assurer la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique sur l'interface  $\Gamma_{12}$ .

##### Intérêts

La démarche est classique pour les codes éléments finis et relativement simple pour l'utilisateur par rapport aux autres méthodes qui seront présentées par la suite. Précisons que le but étant

d'éviter le problème d'imprécision, une valeur unité de  $\alpha$  suffira pour le traiter.

### *Inconvénients*

Le calcul de couplage doit être effectué pour assurer la continuité tangentielle du champ magnétique à l'interface de couplage  $\Gamma_{12}$ . L'utilisation du calcul de couplage par la méthode variationnelle, développée dans la suite de ce chapitre, conduit à une résolution en deux temps.

#### *1.3.3.6. Solution utilisant le potentiel scalaire différent [Mayergoyz-87]*

C'est une méthode qui possède également  $\alpha = 1$  et qui permet d'éviter le calcul de couplage grâce à la continuité du potentiel scalaire magnétique à l'interface de couplage  $\Gamma_{12}$ . L'idée principale consiste à négliger la saturation magnétique dans un premier temps et de calculer le champ magnétique  $\mathbf{H}_0$  en supposant que la perméabilité des régions ferromagnétiques soit infinie. Donc le champ magnétique dans les régions de perméabilité infinie est exactement égal à zéro. Dans un deuxième temps le champ de différence  $\mathbf{h}$  (qui est exactement le champ total dans le fer) est introduit:

$$\mathbf{h} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0 \quad (\text{I.23})$$

$\mathbf{h}$  peut être considéré comme perturbation de  $\mathbf{H}_0$  due à la perméabilité effective des régions perméables.

Le potentiel scalaire réduit peut être défini pour modéliser le champ magnétique  $\mathbf{H}_0$  dans un premier temps. Ensuite, le potentiel scalaire total est utilisé pour calculer  $\mathbf{h}$ .

### *Intérêts*

L'implémentation peut profiter des algorithmes classiques des codes éléments finis d'où une grande simplicité pour le concepteur. En plus, la continuité du potentiel scalaire dans tout l'espace permet d'éviter le calcul de couplage: la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est naturellement satisfaite.

### *Inconvénients*

Il s'agit d'une résolution en deux temps. La démarche est donc relativement compliquée et demande une bonne habileté pour mener à bien la résolution.

Une autre difficulté est de trouver une solution numérique précise lorsque la perméabilité est considérée comme infinie. Les auteurs de cette méthode ont suggéré d'approcher la perméabilité infinie par une grande constante. Malheureusement, cette proposition crée une autre sorte d'erreur, car le champ magnétique dans les régions de perméabilité finie n'étant pas exactement nul, alors le champ de différence n'est pas non plus exactement égal au champ total.

Par ailleurs, il est fort possible d'imposer une perméabilité infinie en mettant une condition flottante sur le potentiel total à l'interface  $\Gamma_{12}$ . Mais est-ce nécessaire de le faire ? Cette programmation nécessite alors un calcul de couplage pour assurer la condition exacte de la

perméabilité infinie, et par conséquent, l'intérêt principal par rapport à l'approche précédente disparaît.

### *1.3.3.7. Utilisation du potentiel scalaire général [Gyimesi-92], [Gyimesi-93]*

C'est une méthode qui cherche à diminuer le plus possible la valeur de  $\alpha$ . Le principe consiste à bien prédire le champ source  $\mathbf{H}_s$  pour que le champ  $\mathbf{H}_m$  soit le moins grand possible. Il revient à faire décroître  $\alpha$  et le gain en précision est alors obtenu.

Dans tout le domaine d'étude  $\Omega$ , le champ magnétique est exprimé sous la forme suivante:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_g - \text{grad } \phi_g \quad (\text{I.24})$$

dans laquelle,  $\mathbf{H}_g$  est le champ de prédiction généralisé qui satisfait la loi d'Ampère et  $\phi_g$  est le potentiel scalaire général. Une condition nécessaire à la définition de  $\mathbf{H}_g$  est que la valeur absolue de  $\mathbf{H}_g$  doit être nettement supérieure à celle de  $\text{grad } \phi_g$ . Il résulte alors à une faible  $\alpha$ .

L'idée principale de la méthode consiste à se doter d'une plus grande liberté de choix de système de courants pour le calcul du potentiel scalaire général.

Nous appelons par convention  $\mathbf{J}_0$  et  $\mathbf{J}_i$  les systèmes de courants destinés à calculer le potentiel scalaire dans l'air et dans les régions perméables, respectivement. Bien entendu les courants  $\mathbf{J}_0$  dans l'air et  $\mathbf{J}_i$  dans le reste doivent être identiques aux courants effectifs  $\mathbf{J}_s$  pour que la physique du problème soit respectée. Mais le fait que  $\mathbf{J}_0$  dans l'air soit identique à  $\mathbf{J}_s$  comme dans la formulation en potentiel réduit peut poser des problèmes d'imprécision. Par exemple, si les courants effectifs sont très proches des régions perméables, ils provoquent un champ  $\mathbf{H}_j$ , calculé par la loi de Biot-Savart, très important dans ces régions alors que le champ total est naturellement limité par le matériau perméable. On dit que  $\mathbf{H}_j$  est une mauvaise prédiction de  $\mathbf{H}$  dans ce cas.

Contrairement aux autres méthodes qui se basent sur le système effectif  $\mathbf{J}_s$  de courants, cette méthode cherche à mieux placer les courants  $\mathbf{J}_0$  pour que la précision du calcul soit assurée. Elle consiste à placer  $\mathbf{J}_0$  dans l'air le plus loin possible des régions perméables pour que le calcul dans les régions perméables soit correct.

#### *Intérêts*

La démarche est habituelle pour les codes utilisant la méthode des éléments finis. Cette méthode permet également de prendre en compte des conducteurs perméables. De plus cette formulation donne une structure générale pour toutes les formulations existantes.

#### *Inconvénients*

Le choix du système fictif  $\mathbf{J}_0$  est tout à fait artificiel. Les propriétés géométriques du problème peuvent restreindre l'éventail de choix, et la précision en dépend. Le calcul de couplage est obligatoire pour assurer la continuité tangentielle du champ magnétique à l'interface dans le cas où  $\mathbf{J}_i$  est différent de  $\mathbf{J}_0$ . La démarche est très complexe et demande une bonne habileté de

l'utilisateur. Si nous supposons que le couplage soit assuré par une méthode variationnelle décrite plus loin, la résolution comporte donc trois étapes de calcul différentes.

#### 1.3.3.8. Résumé

Les méthodes mentionnées sont résumées dans le tableau suivant:

Tableau I.1. Méthodes existantes

Méthode	Intérêts	Inconvénients
potentiel réduit	+ simple + sans couplage	+ raffinement du maillage
potentiel d'arête, l'arbre	+ simple + sans couplage + moins d'inconnues	+ influence de l'arbre + code inhabituel
potentiel d'arête, auto jaugée	+ sans influence de l'arbre + sans couplage	+ courant filaire + nombre d'inconnues + résolution vectorielle
potentiel total	+ simple + code habituel	+ introduction du couplage + démarche complexe
potentiel différent	+ code habituel + pas de couplage entre potentiels	+ erreur due à $\mu$ finie + démarche complexe
potentiel général	+ code habituel	+ choix artificiel des courants + introduction du couplage + démarche très complexe

### 1.3.4. Méthode retenue

#### 1.3.4.1. Choix de méthode

Il est impossible d'extraire une méthode ayant toutes les qualités car une telle méthode n'existe pas. Les critères qui nous guident dans le choix sont les suivants: la simplicité de la démarche, la réutilisation de code standard et la précision obtenue.

Notre choix passe alors à travers quatre étapes essentielles.

Premièrement, le potentiel réduit seul est abandonné car il demande un trop grand soin sur le maillage pour assurer la précision.

Deuxièmement, le potentiel d'arête est aussi abandonné. La formulation en potentiel d'arête utilisant l'arbre est éliminée car la précision dépend du choix de l'arbre. Malgré ses performances intéressantes, la formulation en potentiel d'arête avec la jauge implicite n'est pas retenue non plus du fait du coût de la partie de résolution concernant la variable d'état vectorielle.

Ensuite, parmi les méthodes cherchant à améliorer le coefficient de prédiction  $\alpha$ , la méthode utilisant le potentiel général est éliminée. La raison réside dans le fait que la démarche est jugée trop compliquée. En plus, elle demande à la fois un calcul de couplage et un choix pertinent du système fictif de courants. Il est vrai que la faible valeur de  $\alpha$  ainsi obtenue améliore beaucoup la précision du calcul. Mais avec une valeur unité de  $\alpha$ , la précision est déjà tout à fait correcte.

Donc il reste deux méthodes utilisant le potentiel différent ou le potentiel total à choisir. La formulation en potentiel différent est également éliminée parce que l'affectation d'une valeur finie de la perméabilité mène à une autre sorte d'erreur. En plus, la démarche nécessaire serait relativement compliquée.

Enfin, la méthode retenue pour l'amélioration de la précision est celle utilisant la formulation en double potentiel scalaire: le potentiel réduit dans l'air et le potentiel total dans les régions perméables. Cette formulation était également implantée dans notre logiciel FLUX3D.

Le déroulement du choix peut être présenté par le schéma suivant:

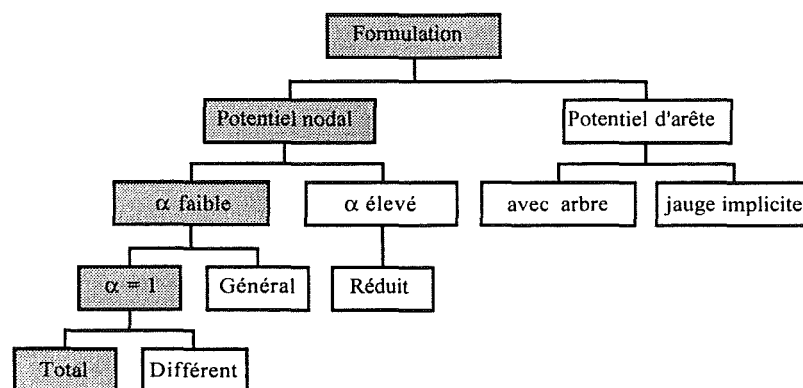


Figure I.3. Choix de méthode

#### 1.3.4.2. Formulation en potentiels réduit et total

Dans les régions ferromagnétiques sans courant, il est préférable d'utiliser le potentiel total tandis que dans l'air le champ magnétique est modélisé par la formulation en potentiel réduit pour tenir compte de l'existence du courant.

#### Equations

Le champ magnétique est exprimé sous la forme suivante

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (\text{I.25})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j - \text{grad } \phi_r \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (\text{I.26})$$

dans laquelle  $\mathbf{H}_j$  est calculé par la loi de Biot-Savart.

Avec les relations de constitution des matériaux

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_r + \mu \mathbf{H} \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (\text{I.27})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (\text{I.28})$$

dans laquelle  $\mathbf{B}_r$  est l'induction rémanente du matériau magnétique.

Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B$$

*Forme discrète*

Soient  $N_i$  les fonctions de pondération, continues et respectant la condition aux limites suivante:

$$N_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (\text{I.29})$$

La forme intégrale s'écrit

$$\int_{\Omega_1} N_i \operatorname{div}(\mathbf{B}_r - \mu \operatorname{grad} \phi) d\Omega + \int_{\Omega_2} N_i \operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{H}_j - \mu_0 \operatorname{grad} \phi_r) d\Omega = 0 \quad (\text{I.30})$$

La continuité de la composante normale de l'induction s'écrit sous la forme

$$\int_{\Gamma_{12}} N_i \mu_0 (\mathbf{H}_j - \operatorname{grad} \phi_r) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma_{12}} N_i (\mathbf{B}_r - \mu \operatorname{grad} \phi) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma_{12}} N_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I.31})$$

Compte tenu de (I.31), l'introduction du théorème de Green permettant d'abaisser l'ordre de dérivation donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \operatorname{grad} N_i \mu \operatorname{grad} \phi d\Omega - \int_{\Omega_1} \operatorname{grad} N_i \cdot \mathbf{B}_r d\Omega + \int_{\Omega_2} \operatorname{grad} N_i \mu_0 \operatorname{grad} \phi_r d\Omega - \int_{\Omega_1} \operatorname{grad} N_i \mu_0 \mathbf{H}_j d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_H + \Gamma_B} N_i (\mathbf{B}_r - \mu \operatorname{grad} \phi) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_H + \Gamma_B} N_i \mu_0 (\mathbf{H}_j - \operatorname{grad} \phi_r) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au domaine. La suppression des deux dernières intégrales sur les surfaces  $\Gamma_B + \Gamma_H$  permet de vérifier faiblement les conditions aux limites. Alors, il reste

$$\int_{\Omega_1} \operatorname{grad} N_i \mu \operatorname{grad} \phi d\Omega - \int_{\Omega_1} \operatorname{grad} N_i \cdot \mathbf{B}_r d\Omega + \int_{\Omega_2} \operatorname{grad} N_i \mu_0 \operatorname{grad} \phi_r d\Omega - \int_{\Omega_1} \operatorname{grad} N_i \mu_0 \mathbf{H}_j d\Omega = 0 \quad (\text{I.33})$$

Le potentiel scalaire magnétique  $\Omega$  est discrétisé par



$$\Omega = \sum_{i=1}^N \alpha_i(x, y, z) \Omega_i \quad (\text{I.34})$$

Où  $N$  est le nombre de noeuds du domaine,  $\alpha_i$  est la fonction d'interpolation du noeud  $i$  et  $\Omega_j$  est la valeur nodale de  $\Omega$  au noeud  $j$ .

Tenant compte que  $\text{div}(\mu \mathbf{H}_j) = 0$  dans les régions de perméabilité constante, le quatrième terme de (I.33) est transformé pour éviter le coût dû à l'intégration volumique. Nous obtenons alors

$$\int_{\Omega_2} \text{grad} N_i \mu \mathbf{H}_j d\Omega = \int_{\Gamma_H + \Gamma_B + \Gamma_{12}} N_i \mu \mathbf{H}_j \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega_2} N_i \text{div}(\mu \mathbf{H}_j) d\Omega \quad (\text{I.35})$$

$$\int_{\Omega_2} \text{grad} N_i \mu \mathbf{H}_j d\Omega = \int_{\Gamma_H + \Gamma_B + \Gamma_{12}} N_i \mu \mathbf{H}_j \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I.36})$$

L'écriture matricielle se résume alors à l'équation suivante:

$$[\mathbf{R}_1] \cdot [\phi] + [\mathbf{R}_2] \cdot [\phi_r] = [\mathbf{S}] \quad (\text{I.37})$$

$$\text{avec } R_{1ij} = \int_{\Omega} \text{grad} N_i \mu \text{grad} \alpha_j d\Omega \quad (\text{I.38})$$

$$R_{2ij} = \int_{\Omega_2} \text{grad} N_i \mu \text{grad} \alpha_j d\Omega \quad (\text{I.39})$$

$$S_{ij} = \int_{\Omega_1} \text{grad} N_i \cdot \mathbf{B}_r dS + \int_{\Gamma_B + \Gamma_H + \Gamma_{12}} N_i \mu_0 (\mathbf{H}_j \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\text{I.40})$$

Vu la discontinuité du potentiel scalaire magnétique à l'interface  $\Gamma_{12}$ , la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique doit être assurée par un calcul de couplage supplémentaire.

## I.4. Calcul de couplage

### I.4.1. Continuité tangentielle du champ magnétique

Supposant que  $\mathbf{B}_r$  soit nul, la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface  $\Gamma_{12}$  est exprimée par

$$(\mathbf{H}_j - \text{grad} \phi_r) \times \mathbf{n} = - \text{grad} \phi \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (\text{I.41})$$

$$\text{grad}_S (\phi_r - \phi) = \mathbf{H}_{jt} \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (\text{I.42})$$

avec  $\text{grad}_S \Omega$  la projection de  $\text{grad} \Omega$  sur  $\Gamma_{12}$  et  $\mathbf{H}_{jt}$  la composante tangentielle de  $\mathbf{H}_j$  sur  $\Gamma_{12}$ .

En définissant  $\Delta\phi = \phi_r - \phi$ , le potentiel « source » surfacique, nous obtenons:

$$\text{grad}_S \Delta\phi = \mathbf{H}_{jt} \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (\text{I.43})$$

Le potentiel source est alors la représentation surfacique du champ source pour les régions perméables. Mathématiquement,  $\Delta\phi$  peut être calculé soit par la méthode intégrale soit par la méthode variationnelle.

#### I.4.2. Méthode intégrale

##### *I.4.2.1. Analyse*

La forme intégrale de (I.43) est:

$$\Delta\phi(M) = \int_O^M \mathbf{H}_{jt} \cdot d\mathbf{l} + \Delta\phi(O) \quad (\text{I.44})$$

dans laquelle O et M sont des points de  $\Gamma_{12}$ .

L'intégration linéique est effectuée sur une courbe qui appartient également à  $\Gamma_{12}$ . Pour rendre uniques les valeurs de  $\Delta\phi$ , nous devons fixer un point de référence pour lequel  $\Delta\phi$  s'annule, par exemple le point O de la figure I.4:

$$\Delta\phi(O) = 0 \quad (\text{I.45})$$

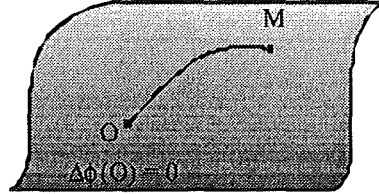


Figure I.4. Ligne à intégrer et point de référence O

$$\text{d'où} \quad \Delta\phi(M) = \int_O^M \mathbf{H}_{jt} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{I.46})$$

En réalité, la ligne d'intégration est un arbre des arêtes du maillage qui appartient à l'interface  $\Gamma_{12}$ . L'intégration linéique serait faite sur chaque arête de cet arbre.

#### *Intérêts*

La méthode intégrale assure localement la précision sur chaque arête de l'arbre créé. De plus, les valeurs de  $\Delta\phi$  sont calculées analytiquement et ne sont pas issues d'une résolution explicite. Donc le calcul peut être effectué de manière transparente pour l'utilisateur, ce qui facilite beaucoup son intervention.

### Inconvénients

L'implémentation informatique nécessite la création d'un arbre de  $\Gamma_{12}$  sur lequel l'intégration sera ensuite effectuée. Bien entendu, la réalisation n'est pas habituelle aux codes en méthode des éléments finis et par conséquent, la charge du concepteur et le temps de calcul sont alourdis. D'autre part, la modélisation peut se heurter à un problème d'imprécision.

#### I.4.2.2. Mise en évidence du problème d'imprécision

Pour mettre en évidence le problème d'imprécision, nous considérons un exemple tridimensionnel dont la géométrie est illustrée à la figure I.5. La frontière supérieure est un plan de symétrie normal où le champ magnétique sort perpendiculairement de la plaque. La plaque magnétique est modélisée en potentiel scalaire total, et théoriquement, la distribution du potentiel total doit être constante sur la frontière supérieure.

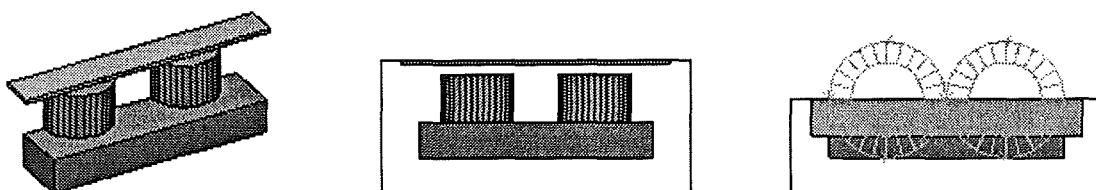


Figure I.5. Géométrie du problème considéré: vue 3D, vue horizontale et vue verticale avec bobines

En utilisant la méthode intégrale, nous obtenons malheureusement des taches qui ont une valeur de potentiel nettement supérieure à celle de leurs voisinages (figure I.6). Si nous traçons la distribution en relief du potentiel total sur la frontière en question comme l'illustre la figure I.7, nous observons des pics bizarres du potentiel total.

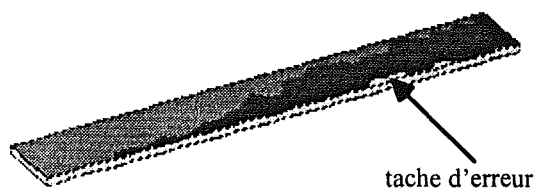


Figure I.6. Taches d'erreurs sur la frontière supérieure

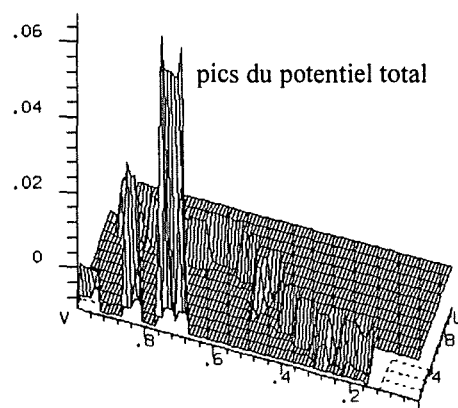


Figure I.7. Distribution en relief de  $\phi$  sur la frontière supérieure

#### I.4.2.3. Explication du problème de précision

L'explication vient du fait que la continuité tangentielle du champ magnétique n'est pas assurée fortement sur les « co-branches » de l'arbre créé.

### Définition

L'arbre est l'ensemble des arêtes qui permettent de parcourir tous les noeuds de  $\Gamma_{12}$  sans refermer aucune boucle. Les constituants d'un arbre sont les branches. L'arête, qui n'est pas une branche, est une co-branche. Donc chaque co-branche peut refermer une boucle à travers une série donnée des branches de l'arbre.

### Erreur d'arrondi sur les co-branches

Il peut arriver qu'une co-branche quelconque crée une boucle à travers une longue série de branches de l'arbre comme illustré à la figure I.8. Théoriquement, l'intégration linéique sur la co-branche sera exactement la différence des potentiels sources de ses noeuds d'extrême A et B:

$$\Delta\phi(A) - \Delta\phi(B) = \int_B^A \mathbf{H}_{jt} \, dl \quad (I.47)$$

Mais du fait que cette différence provient d'un calcul accumulé sur une longue chaîne de branches de l'arbre, la continuité tangentielle du champ n'est plus assurée sur la co-branche en question.

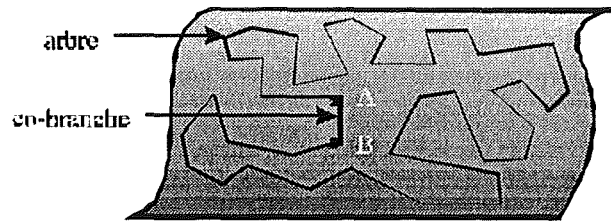


Figure I.8. Co-branche d'une longue série de branches

Supposons que la co-branche AB soit sur le plan à champ normal comme c'est le cas de l'exemple. En principe,  $\phi(A) = \phi(B)$  mais en réalité, on aperçoit une différence de potentiel entre  $\phi(A)$  et  $\phi(B)$  qui représente exactement l'erreur accumulée commise au cours de l'intégration linéique sur les branches formant une boucle avec la co-branche AB. Cette différence se traduit par des pics aperçus précédemment.

#### I.4.3. Méthode variationnelle [Krähenbühl-88]

Pour éviter le problème d'imprécision mentionné, une méthode variationnelle a été mise en oeuvre. Le principe consiste à résoudre l'équation:

$$\text{grad}_S \Delta\phi = \mathbf{H}_{jt} \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (I.48)$$

en minimisant une fonctionnelle  $F$  qui est l'intégrale surfacique de l'écart quadratique entre le gradient surfacique de ce potentiel et le champ  $\mathbf{H}_{jt}$  donné.

$$F = \int_{\Gamma_{12}} (\text{grad}_s \Delta \phi - \mathbf{H}_{jt})^2 dS \quad (\text{I.49})$$

La forme discrète s'écrit

$$\int_{\Gamma_{12}} \text{grad}_s \alpha_i \text{grad} \Delta \phi dS = \int_{\Gamma_{12}} \text{grad}_s \alpha_i \mathbf{H}_{jt} dS \quad (\text{I.50})$$

### *Intérêts*

La matrice obtenue est symétrique, définie positive et de type bande. Elle est assemblée et résolue à l'aide des outils habituellement utilisés par la méthode des éléments finis. Par conséquent, le calcul est rapide et les conditions aux limites sont faciles à gérer. En plus, la minimisation de la fonctionnelle assure globalement la précision.

### *Inconvénients*

Les valeurs nodales du potentiel source sont issues d'une résolution explicite, ce qui demande une intervention de l'utilisateur.

#### I.4.4. Choix de méthode de couplage

Nous devons faire un choix de méthode de couplage pour que nous puissions aller plus loin dans nos études. Les critères de notre choix sont la précision globale, la facilité de la gestion des conditions aux limites et le coût du calcul.

En ce qui concerne la rapidité du calcul, nous avons constaté que dans les cas étudiés la méthode variationnelle est beaucoup plus rapide que la méthode intégrale. La justification repose sur deux points principaux. Le premier c'est que la résolution par la méthode des éléments finis bénéficie de la performance des outils matriciels sans cesse améliorés depuis des années. Le second c'est que le nombre de manipulations numériques est probablement moins important.

En effet, compte tenu de la relation topologique  $f = a - n + 1$  dans laquelle  $f$  est le nombre d'éléments surfaciques,  $a$  est le nombre d'arêtes et  $n$  est le nombre de noeuds, nous voyons que  $f$  est plus petit que  $a$  surtout lorsque  $n$  est élevé. Par conséquent, le nombre  $f$  d'éléments parcourus de l'intégration par la méthode variationnelle est nettement inférieur au nombre  $a$  d'éléments parcourus par la méthode intégrale. Bien entendu, le coût de calcul dépend en plus du nombre de points Gauss  $n_{pf}$  et  $n_{pa}$  utilisés pour les facettes et les arêtes, c'est à dire que la différence  $n_{pf} f - n_{pa}(f - n + 1)$  va déterminer le gain de temps effectif entre deux méthodes. Dans le cas très simple où  $n_{pf} = n_{pa} = 1$ , le coût de calcul de la méthode variationnelle est le plus faible mais cette constatation n'est pas généralisable. En pratique, nous observons toujours un temps de calcul très faible de la méthode variationnelle par rapport à l'utilisation de l'arbre.

D'autre part, la méthode variationnelle facilite la gestion des conditions aux limites et assure la précision globale. La méthode que nous choisissons est donc la méthode variationnelle.

### I.5. Démarche de la résolution

Pour clarifier la démarche de modélisation à suivre, un exemple simple est utilisé. La géométrie de ce problème est constituée d'un cube perméable. Une spire linéique carrée dans laquelle circule un courant est placée dans le plan de symétrie du cube. La géométrie du problème est présentée à la figure I.9.

Supposons que les données géométriques et physiques soient créées. La démarche consiste à résoudre le problème en deux temps. Dans un premier temps, le potentiel source surfacique  $\Delta\phi$  est calculé sur l'interface de couplage  $\Gamma_{12}$ . Dans un deuxième temps, les potentiels scalaires total  $\phi$  et réduit  $\phi_r$  sont calculés dans les régions perméables et dans l'air, respectivement.

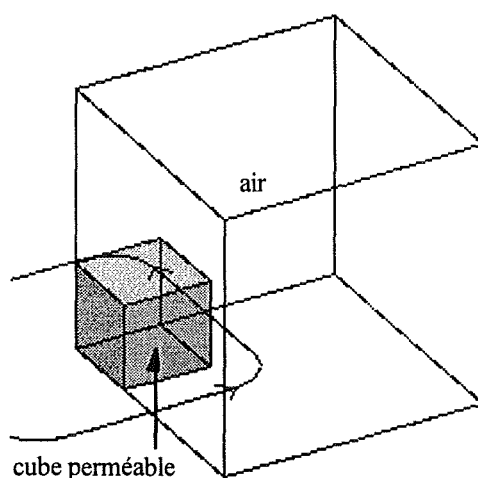


Figure I.9. Géométrie du problème simplifié

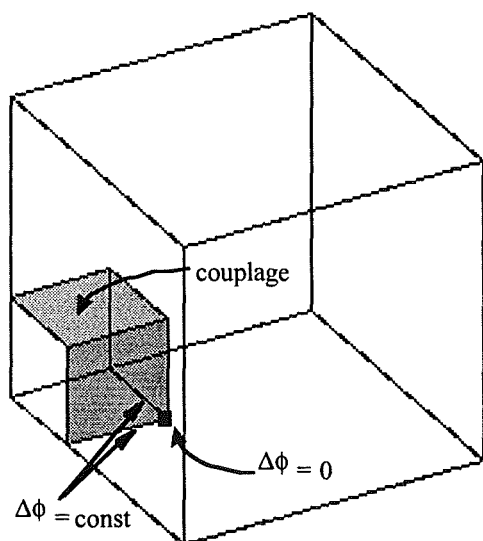


Figure I.10. Régions de couplage et conditions aux limites

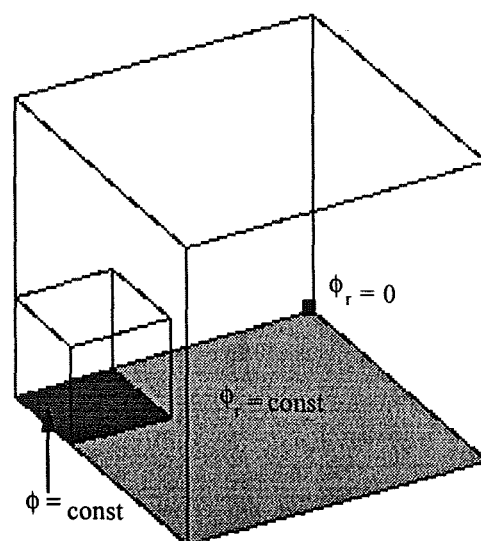


Figure I.11. Conditions aux limites

### I.5.1. Première résolution

Le but est de calculer le potentiel source  $\Delta\phi$  sur la région de couplage  $\Gamma_{12}$ . Les conditions aux limites sont illustrées à la figure 1.12 et sont les suivantes:

- pour chaque paquet de lignes disjointes de couplage appartenant au plan à champ normal

$$\Delta\phi = \text{constant} \quad (\text{I.51})$$

- sur un point quelconque de chaque paquet de faces disjointes du couplage

$$\Delta\phi = 0 \quad (\text{I.52})$$

En discrétisant le potentiel source  $\Delta\phi$ , les valeurs nodales de ce potentiel sont obtenues par une résolution d'un système linéaire qui est issu de la méthode variationnelle.

### I.5.2. Deuxième résolution

La deuxième résolution calcule  $\phi_r$  dans l'air et  $\phi$  dans les régions perméables. Les régions volumiques  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  portent les formulations en potentiel total et réduit, respectivement. Dans cette étape de calcul, le potentiel source  $\Delta\phi$  n'intervient plus en tant que variable d'état. Les conditions aux limites illustrées à la figure I.11 sont les suivantes:

- pour chaque paquet de faces disjointes à même potentiel du plan à champ normal

$$\phi = \text{constant} \quad (\text{I.53})$$

$$\phi_r = \text{constant} \quad (\text{I.54})$$

- pour un point quelconque dans  $\Omega_2$

$$\phi_r = 0 \quad (\text{I.55})$$

- sur le couplage  $\Gamma_{12}$  entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$

$$\phi_r = \phi + \Delta\phi \quad (\text{I.56})$$

Les potentiels total et réduit sont discrétisés et la forme discrète de la formulation en potentiels total et réduit est utilisée pour assembler la matrice. A la fin de la résolution, les valeurs nodales de  $\phi$  et  $\phi_r$  sont obtenues dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , respectivement.

Vu la complexité de démarche à suivre, son automatisation est indispensable. Cette automatisation sera effectuée plus tard au chapitre VII.

## **I.6. Validation**

Une validation numérique de la méthode est présentée à travers le problème N°13 du TEAM Workshop pour lequel le matériau magnétique possède un comportement non linéaire.

### I.6.1. Description du problème

La description détaillée du problème N°13 est présentée par Nakata [Nakata-93]. Il s'agit d'une bobine d'excitation de 1000 AT, parcourue par un courant continu, placée entre deux canaux magnétiques et d'une plaque en fer insérée entre ces deux canaux. Le matériau utilisé est non linéaire. Les figures I.12 et I.13 montrent la géométrie et le maillage de ce problème.

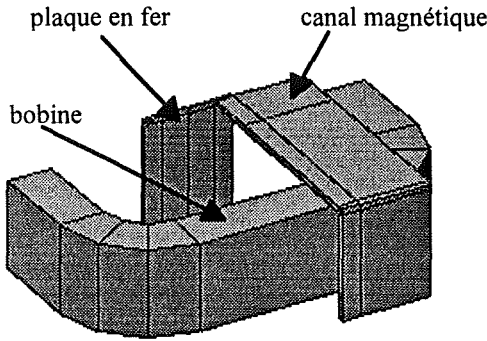


Figure I.12. Géométrie du problème N°13

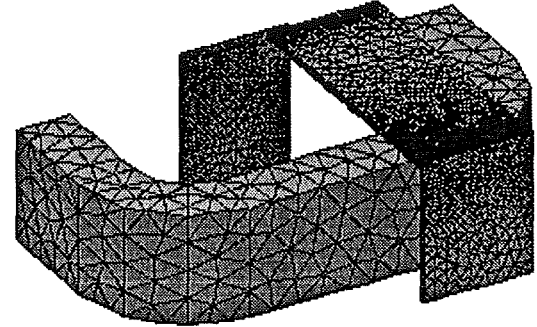


Figure I.13. Maillage du problème N°13

La courbe B-H du matériau magnétique a été mesurée après une démagnétisation soignée. Cette courbe est donnée sur la figure I.14. La courbe à induction élevée ( $B > 1.8T$ ) est approchée par les relations suivantes:

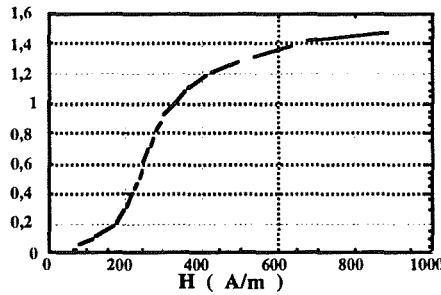


Figure I.14. Caractéristiques du matériau non linéaire

$$B = \mu_0 H + (a H^2 + b H + c) \quad \text{avec } (2.22T \geq B \geq 1.8T) \quad (I.57)$$

$$B = \mu_0 H + M_s \quad \text{avec } (B \geq 2.22T) \quad (I.58)$$

dans lesquelles  $M_s$  est la saturation de magnétisation du matériau. Les coefficients concernés sont

$$a = -2,822 \cdot 10^{-10}, b = 2,529 \cdot 10^{-5} \text{ et } c = 1,591$$

### I.6.2. Résultats

Les inductions magnétiques calculées dans le matériau et dans l'air en de nombreuses positions



sont comparées avec les résultats mesurés. Les méthodes de couplage variationnelle et intégrale sont utilisées.

La figure I.15 présente la distribution partielle de l'induction dans le fer. Les valeurs concrètes de la mesure et du calcul sont indiquées au tableau I.2.

Tableau I.2

Comparaison des méthodes sur les valeurs de l'induction dans la plaque en fer

N°	Coordonnées			Densité moyenne du flux (T)			
				mesure avec g (mm)		calcul avec g=0,5 (mm)	
	x	y	z	0,47	0,52	variation.	intégrale
1	$1,6 \geq x \geq 0$	$25 \geq y \geq -25$	0,0	1,354	1,333	1,408	1,399
2			10,0	1,339	1,329	1,396	1,388
3			20,0	1,304	1,286	1,363	1,354
4			30,0	1,245	1,225	1,306	1,297
5			40,0	1,138	1,129	1,217	1,209
6			50,0	0,982	0,985	1,083	1,075
7			60,0	0,674	0,655	0,731	0,726
8	2,1	$65 \geq y \geq 15$	$63,2 \geq z \geq 60$	0,263	0,259	0,242	0,243
9	10,0			0,451	0,453	0,505	0,506
10	20,0			0,563	0,554	0,584	0,585
11	30,0			0,641	0,637	0,665	0,665
12	40,0			0,706	0,698	0,728	0,728
13	50,0			0,763	0,755	0,782	0,783
14	60,0			0,819	0,809	0,832	0,832
15	80,0			0,907	0,901	0,893	0,894
16	100,0			0,958	0,945	0,957	0,957
17	110,0			0,968	0,954	0,964	0,965
18	122,1			0,968	0,956	0,931	0,932
19	$125,3 \geq x \geq 122,1$	$65 \geq y \geq 15$	60,0	0,971	0,960	0,970	0,971
20			50,0	0,973	0,965	0,990	0,991
21			40,0	0,982	0,970	0,995	0,996
22			30,0	0,985	0,974	1,003	1,001
23			20,0	0,991	0,981	1,005	1,005
24			10,0	0,995	0,984	1,007	1,008
25			0,0	0,995	0,985	1,008	1,009

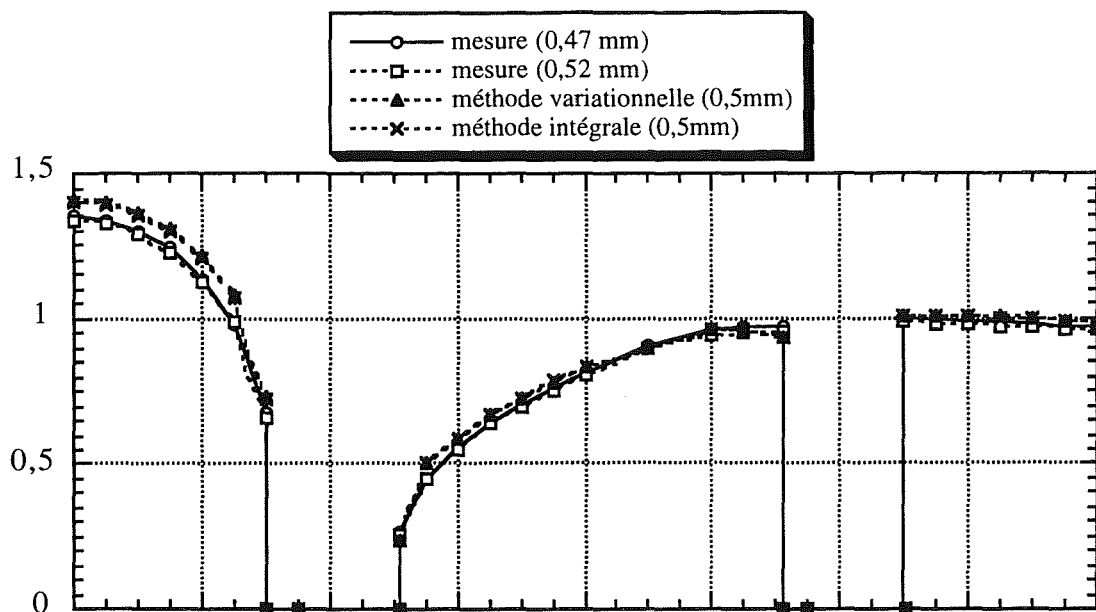


Figure I.15. Comparaison des méthodes sur les valeurs de l'induction dans la plaque en fer.

Le tableau I.3 et la figure I.17 montrent la distribution du module de l'induction dans l'air suivant la ligne AB de la figure I.16, dont  $y = 20\text{mm}$  et  $z = 55\text{mm}$ .

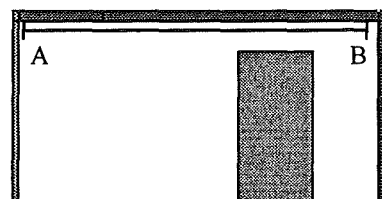


Figure I.16. Support AB des points de calcul de l'induction dans l'air

Tableau I.3  
Comparaison des méthodes de la norme de l'induction dans l'air.

N°	Coordonnées (mm)			Densité du flux (Gs)		
	x	y	z	mesure	numérique	
					variationnelle	intégrale
26	10,0	20,0	55,0	315,0	336,8	337,2
27	20,0			194,0	204,2	204,4
28	30,0			153,0	161,1	161,1
29	40,0			133,0	140,1	140,2
30	50,0			120,0	131,2	131,2
31	60,0			110,0	121,9	121,9
32	70,0			98,7	109,2	109,2
33	80,0			79,7	85,7	85,7
34	90,0			53,3	55,2	55,2
35	100,0			28,4	28,0	28,0
36	110,0			14,2	13,9	13,9

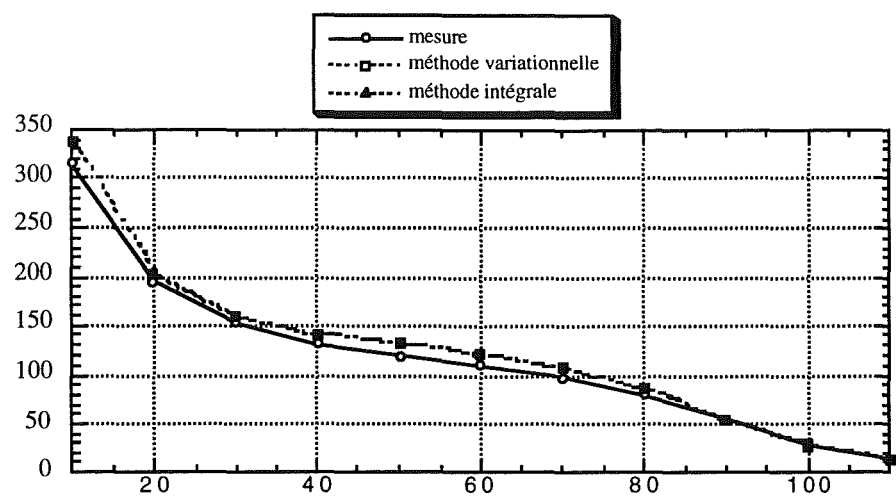


Figure I.17. Distribution de la norme de l'induction dans l'air.

La saturation du matériau magnétique est illustrée à la figure I.18. La carte du champ magnétique et la distribution du potentiel total dans les régions perméables sont montrées à la figure I.19.

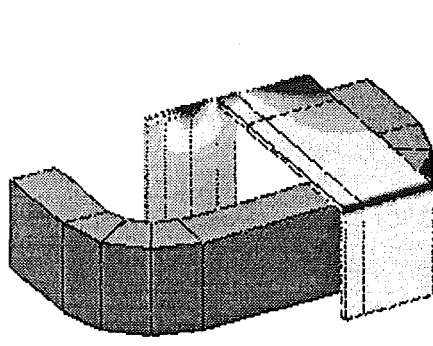


Figure I.18. Saturation du matériau

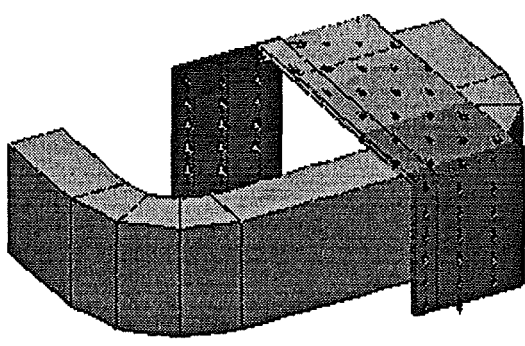


Figure I.19. Distribution de **B** et  $\phi$  dans les régions perméables

Les données résumant les caractéristiques des résolutions sont fournies par le tableau I.4. Le critère de convergence sur la résolution prend la valeur de  $10^{-4}$ . Pour la méthode variationnelle, les premiers caractéristiques correspondent à la résolution de couplage.

Tableau I.4

Caractéristiques des résolutions

Méthode	Variationnelle	Intégrale
nombre d'éléments	8325 + 80576	80576
nombres d'inconnues	16654 + 103990	103990
nombre de coefficients non nuls	121756 + 1628423	1626658
mémoire nécessaire (MB)	2,6 + 30,2	30,2
nombre d'itérations non linéaires	1 + 10	9
nombre moyen d'itérations linéaires	128 + 203	208
temps du calcul linéaire (s)	49 + 713	456
temps de calcul de couplage (s)	1148	4007
station utilisée	HP 712 / 60	HP 712 / 80
vitesse (MFLOPS)	13	30
temps de calcul total de CPU (s)	1148 + 21743	17665

Les résultats obtenus à l'aide de deux méthodes développées sont totalement satisfaisants. Le temps de calcul de couplage se diminue considérablement pour dans la méthode variationnelle.

## I.7. Conclusions

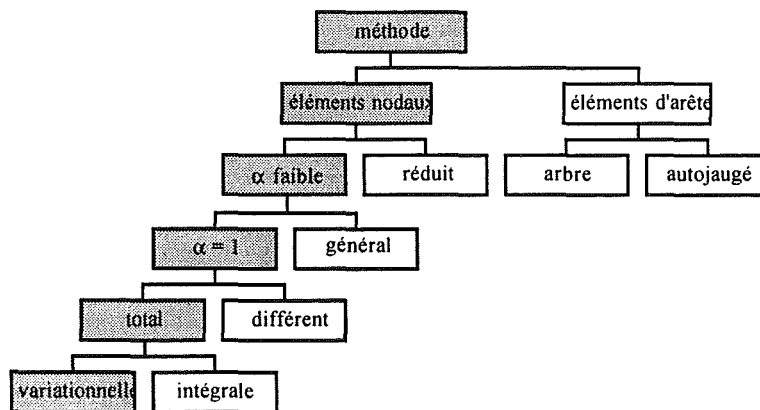


Figure I.20. Schéma du choix de méthode

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence le problème d'imprécision lors de l'utilisation du potentiel scalaire magnétique dans les régions à perméabilité élevée. En introduisant les coefficients de compatibilité et de prédiction, nous avons effectué une analyse générale sur les méthodes qui cherchent à apporter une amélioration sur le problème d'imprécision mentionné. Nous avons opté pour la formulation en potentiels réduit et total afin d'assurer la précision dans la partie ferromagnétique.

Nous avons montré et expliqué le problème d'imprécision lors du calcul de couplage par la méthode intégrale. En tant qu'alternative, la méthode variationnelle a été proposée pour effectuer ce couplage. La figure I.20 montre les étapes de ce choix.

La démarche de la méthode proposée a été également systématisée pour faciliter l'utilisation.

Les méthodes développées ont été validées avec succès sur le problème N°13 du TEAM Workshop.

## Références

- [Bedrosian-91] *G. Bedrosian*, "Magnetostatic Cancellation Error Revisited", *IEEE Trans. on MAG*, Vol. 27. N° 5 (1991), pp. 4181-4184
- [Bedrosian-93] *G. Bedrosian, M.V.K. Chari and J. Joseph*, "Comparison of Full and Reduced Potential Formulation for Low-Frequency Applications", *IEEE Trans. on MAG*, 1993, pp. 1321-1324
- [Golias-94] *N.A. Golias et T.D. Tsiboukis*, "Magnetostatic with Edge Elements: a Numerical Investigation in the Choice of the Tree", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 2877-2880, 1994.
- [Golovanov-95] *C. Golovanov, H.T. Luong, Y. Maréchal et G. Meunier*, "Results for the TEAM Workshop Problem 13 (3-D Nonlinear Magnetostatic Model)", *Proc. Of the TEAM Workshop COMPUMAG 95*, Berlin, 1995.
- [Golovanov-97] *C. Golovanov, Y. Maréchal et G. Meunier*, "Formulation Magnétostatique "Compatible" en Potentiel Vecteur, basée sur les Eléments d'Arête", *soumis à Physique III*, Paris, 1997.
- [Gyimesi-92] *M. Gyimesi, J.D. Lavers*, "Generalized Potential Formulation for 3-D Magnetostatic Problems", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1924-1929, 1992.
- [Gyimesi-93] *M. Gyimesi, J.D. Lavers, T. Pawlak and D. Ostergaard*, "Application of the General Potential Formulation", *IEEE Trans. on MAG*, Vol. 29. N° 2 (1993), pp. 1345-1347
- [Krähenbühl-88] *L. Krähenbühl*, "Surface Current and Eddy-Current 3D Computation using Boundary Integral Equations Techniques", 3ème symposium international IGTE, Graz, Autriche, september 1988.
- [Mayergoyz-87] *I.D. Mayergoyz, M.V.K. Chari and J.D'Angelo*, "A new scalar potential Formulation for Three-Dimensional Magnetostatic Problems", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 3889-3894, 1987.
- [McDaniel-83] *T.W. McDaniel, R.B. Fernandez, R.R. Root and R.B. Anderson*, "An accurate scalar potential finite element method for linear, two-dimensional Magnetostatics Problem", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 725-737, 1983.
- [Nakata-93] *T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara*: "Summary of Results for TEAM Workshop Problem 13 (3-D Nonlinear Magnetostatic Model)", *Proc of Fourth International TEAM Workshop*, pp. 33-39, 1993.
- [Simkin-79] *J. Simkin and C.W. Trowbridge*, "On the Use of the Total Potential in the Numerical Solution of Field Problems in Electromagnetics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14 (1979), pp. 423-439.
- [Webb-89] *J.P. Webb and B. Forghani*, "A single scalar potential method for 3D Magnetostatics using Edge Elements", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 4126-4128, 1989.



## CHAPITRE II

# **GENERATION ROBUSTE DE L'ENSEMBLE COMPLEXE DES CONDITIONS AUX LIMITES**





## Chapitre II

### Génération robuste de l'ensemble complexe des conditions aux limites

#### *Situation*

*La mise en oeuvre de la formulation en potentiels réduit et total fait intervenir, dans l'ensemble des conditions aux limites, un type de condition de couplage entre potentiels réduit et total qui partage certaines variables avec les autres conditions. L'introduction effective de l'ensemble de ces conditions dans le système global nécessite cependant une bonne « séparation » des conditions gérées, donc il est indispensable de gérer avec robustesse les conditions aux limites. Une mauvaise génération peut être coûteuse et être source d'erreurs.*

#### *Question du chapitre*

*Peut - on générer l'ensemble complexe des conditions aux limites “mal séparées” efficacement à un coût de calcul raisonnable ?*

#### *Démarche directrice*

*La méthode d'élimination de Gauss permet de rendre utilisable la relation matricielle des contraintes en phase d'introduction des conditions aux limites dans le système global. La précision de cette transformation est assurée en utilisant la technique de pivot maximal. Le caractère économique est maintenu par découpage en morceaux indépendants et par stockage creux de la matrice des coefficients.*

### II.1. Introduction

#### *Besoin d'une génération robuste des conditions aux limites*

La mise en oeuvre de la formulation en potentiels réduit et total fait intervenir, dans l'ensemble des conditions aux limites, un type de condition de couplage entre potentiels réduit et total qui partage certaines variables avec les autres conditions. L'introduction de cet ensemble de conditions dans le système global nécessite alors une méthode de transformation précise et économique.

Une bonne génération des conditions aux limites participe en grande partie à la qualité de la modélisation. L'ensemble initial des conditions aux limites, manipulé par l'utilisateur, doit être transformé avant d'être introduit dans le système global tout en contrôlant la précision numérique et l'aspect économique de la transformation. La précision de cette transformation joue clairement un rôle important sur la précision finale de la modélisation. Comme la matrice générant les conditions aux limites possède souvent une taille considérable, on ne peut pas négliger non plus l'aspect économique de cette procédure.

Une transformation de qualité est naturellement satisfaisante dans le cas simple où les conditions sont indépendantes entre elles. C'est le cas des conditions “traditionnelles”, à savoir

les conditions de types Dirichlet et Neumann.

En réalité, la prise en compte du couplage entre potentiels réduit et total [Luong-96], du mouvement [Perrin-92] et d'autres types de contraintes dans les problèmes industriels fait apparaître des conditions aux limites partageant certaines variables communes. Pour introduire efficacement ce genre de conditions dans le système global, nous sommes obligés de transformer la matrice constitutive des conditions aux limites, et par conséquent, de choisir des méthodes pertinentes pour les aspects précision et coût [Maréchal-97].

### *Expression du système d'équations*

Après assemblage par addition des formes élémentaires, le système global s'écrit

$$[R] \{u\} = \{s\} \quad (\text{II.1})$$

où  $[R]$  est la matrice globale assemblée,  $\{u\}$  est le vecteur global des variables nodales et  $\{s\}$  est le vecteur global des sollicitations.

La résolution consiste à trouver  $\{u\}$  qui est la solution du système (II.1) en satisfaisant les conditions aux limites, par exemple les conditions de type Dirichlet

$$u_i = \underline{u}_i \quad (\text{II.2})$$

Autrement dit, le système algébrique initial doit être résolu après modification de la matrice  $R$  et du vecteur  $s$  pour tenir compte des conditions aux limites.

## **II.2. Introduction des conditions aux limites dans le système global**

### II.2.1. Méthode d'introduction des conditions aux limites

Les conditions aux limites peuvent être introduites dans le système global de plusieurs manières: méthode du terme diagonal dominant, méthode du terme unité sur la diagonale ou méthode de suppression des équations [Dhatt-84].

#### *II.2.1.1. Méthode du terme diagonal dominant*

Chaque relation  $u_i = \underline{u}_i$  est introduite en remplaçant  $R_{ii}$  par  $R_{ii} + \alpha$  ( $\alpha$  ayant une valeur très grande par rapport à tous les termes  $R_{ij}$ ) et  $s_i$  par  $\alpha \underline{u}_i$ .

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1i} & \cdots & R_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{i1} & \cdots & R_{ii} + \alpha & \cdots & R_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & \cdots & R_{ni} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ \alpha \underline{u}_i \\ \vdots \\ s_n \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

L'équation  $i$  s'écrit:

$$\alpha u_i + \left( \sum_{j=1}^n R_{ij} u_j \right) = \alpha \bar{u}_i \quad (\text{II.4})$$

Elle donnera la solution approchée  $u_i = \underline{u}_i$  si  $\alpha \underline{u}_i$  est très grand par rapport à  $\sum_{j=1}^n R_{ij} u_j$ , ce qui conduit à une erreur d'arrondi sur  $u_i$ . Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre car il suffit de changer les deux termes  $R_{ii}$  et  $s_i$ , mais elle peut conduire à des problèmes numériques, d'une part à cause du mauvais équilibrage de la matrice, et d'autre part du fait de l'approximation de la prise en compte des conditions lorsque certaines composantes de  $\{u\}$  sont importantes.

### II.2.1.2. Méthode du terme unité sur la diagonale

Elle consiste à modifier, pour chaque relation  $u_i = \underline{u}_i$ , le vecteur  $\{s\}$  et la matrice  $[R]$  comme suit

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1,i-1} & 0 & R_{1,i+1} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{i-1,1} & \dots & R_{i-1,i-1} & 0 & R_{i-1,i+1} & \dots & R_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ R_{i+1,1} & \dots & R_{i+1,i-1} & 0 & R_{i+1,i+1} & \dots & R_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & \dots & R_{n,i-1} & 0 & R_{n,i+1} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 - R_{1i} \underline{u}_i \\ \vdots \\ s_{i-1} - R_{i-1,i} \underline{u}_i \\ \underline{u}_i \\ s_{i+1} - R_{i+1,i} \underline{u}_i \\ \vdots \\ s_n - R_{ni} \underline{u}_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Cette méthode ne pose pas les problèmes numériques précédents. Par contre, une normalisation des termes de la matrice doit être effectuée pour ramener les  $R_{ij}$  vers des valeurs comparables avec l'unité, ce qui permet d'éviter un mauvais conditionnement. Elle est aussi plus complexe à programmer.

### II.2.1.3. Méthode de suppression des équations

Elle consiste à restructurer la matrice  $[R]$  et  $\{s\}$  en supprimant les équations correspondant aux degrés de liberté imposés  $u_i$ . La restructuration de  $[R]$  et  $\{s\}$  correspondant à  $u_i = \underline{u}_i$  conduit à la même équation matricielle que (II.5) sauf que la ligne  $i$  et la colonne  $i$  sont enlevées. Cette méthode a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système et de conserver la propriété de symétrie de la matrice. La programmation est également complexe.

### II.2.1.4. Choix de la méthode

#### Méthode retenue

Parmi les méthodes mentionnées précédemment, la méthode de suppression des équations est celle qui est la plus intéressante. Elle permet de réduire le nombre d'inconnues du système et de conserver le caractère symétrique de  $[R]$ , ce qui permet de profiter de solveurs puissants. Ce choix nous conduit à étudier la transformation des variables.

### Transformation des variables

En réalité, les conditions aux limites ne sont pas toujours sous une forme Dirichlet comme supposée dans (II.2). Dans le cas général, les conditions aux limites, exprimées sous formes de combinaisons linéaires entre plusieurs variables, doivent être transformées avant d'être introduite dans le système global.

Soit le système des combinaisons linéaires des conditions aux limites

$$\begin{cases} u_1 = M_{11}v_1 + \dots + M_{1n}v_n + g_1 \\ u_2 = M_{21}v_1 + \dots + M_{2n}v_n + g_2 \\ \dots \\ u_m = M_{m1}v_1 + \dots + M_{mn}v_n + g_m \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

où  $u_1, u_2, \dots, u_m$  sont les variables à éliminer,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont les variables à retenir et  $g_1, g_2, \dots, g_n$  sont les termes de translations.

La relation matricielle des contraintes s'écrit:

$$\{u\} = [M] \{v\} + \{g\} \quad (\text{II.7})$$

dans laquelle  $[M]$  est la matrice des coefficients, éventuellement rectangulaire, et  $\{g\}$  est le vecteur de translation.

La matrice  $[R]$  et le vecteur  $\{s\}$  du système global sont modifiés en tenant compte de la relation matricielle des contraintes (II.7) en vue de supprimer les équations associées à  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . La forme transformée du système global sera la suivante

$$[R'] \{v\} = \{s'\} \quad (\text{II.8})$$

$$\text{où: } [R'] = [M]^T [R] [M] \quad (\text{II.9})$$

$$\{s'\} = [M]^T \{s\} - [M]^T [R] \{g\} \quad (\text{II.10})$$

Cette transformation peut être effectuée séquentiellement en phase d'assemblage élémentaire. Il peut arriver que quelques conditions aux limites, appelées ultérieurement conditions "mal séparées", partagent certaines variables à éliminer. L'existence de conditions "mal séparées" conduit à un dysfonctionnement de la méthode de suppression des équations. Donc, le choix des variables à éliminer  $u_i$  demande un critère spécifique - ne fait pas partie des variables à retenir - pour que la première suppression de  $u_i$  ne nuise pas à la prise en compte des combinaisons ultérieures possédant  $u_i$  comme variable à retenir. Il est nécessaire de transformer au préalable la relation matricielle des contraintes afin d'éviter ce dysfonctionnement.

#### II.2.2. Contraintes « mal séparées »

L'apparition des contraintes "mal séparées" entraîne la nécessité de bien gérer les conditions aux

limites du motif étudié. Pour mettre en évidence la complexité de la génération de contraintes mal séparées, un exemple simple est pris en considération.

*Exemple de contraintes “mal séparées”*

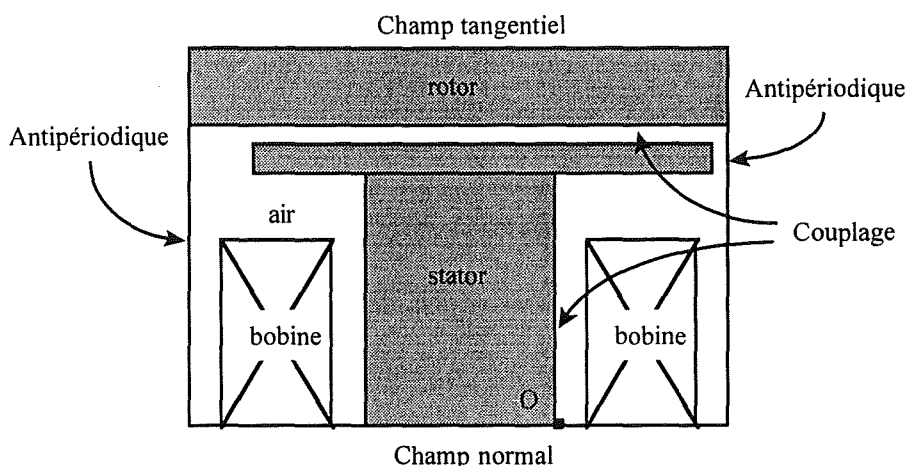


Figure II.1. Ensemble complexe des conditions aux limites du ralentisseur

La modélisation simplifiée du ralentisseur magnétique est un bon exemple d'illustration de la complexité de la génération des conditions aux limites [Luong-96]. Pour la clarté de l'exposé, nous ne considérons qu'un plan de coupe du ralentisseur comme illustré sur la figure II.1. Le ralentisseur possède un rotor, un stator et quelques bobines. La géométrie est périodique et symétrique, donc une modélisation partielle est suffisante. Les conditions aux limites sont les suivantes: le champ magnétique est normal sur la frontière inférieure, tangentiel sur la frontière supérieure, antipériodique sur les deux frontières latérales et enfin, à l'interface des régions ferromagnétiques, la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est assurée par une condition de couplage entre potentiels réduit et total (cf. chapitre I).

La formulation en potentiels réduit et total est employée: le potentiel total  $\phi$  est utilisé dans le stator et dans le rotor tandis que le potentiel réduit  $\phi_r$  est utilisé ailleurs [Simkin-79]. Afin d'assurer la continuité tangentielle du champ magnétique sur le couplage entre potentiels réduit et total, le potentiel source surfacique  $\Delta\phi$  est calculé par la méthode variationnelle [Luong-96].

La méthode de suppression des équations n'est applicable sous sa forme séquentielle qu'à condition que chaque variable à éliminer appartienne à une seule combinaison linéaire. Pour les conditions indépendantes du cas simple, à savoir les conditions “traditionnelles” Dirichlet et Neumann, cette condition est naturellement satisfaite. Par contre, pour les conditions qui partagent des mêmes variables à éliminer, on peut constater un dysfonctionnement.

L'exemple considéré contient certaines conditions qui ne sont pas séparées. Par exemple au point O qui est à l'intersection du plan à champ normal et du couplage entre potentiels réduit et total, la condition à champ normal et la condition de couplage entre potentiels réduit et total se traduisent

$$\phi(O) = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\phi(O) = \phi_r(O) - \Delta\phi(O) \quad (\text{II.12})$$

Nous nous apercevons que  $\phi(O)$  est la variable à éliminer des deux combinaisons linéaires. Mais une fois que la variable  $\phi(O)$  de (II.11) traitée et éliminée dans le système global, sa contribution dans (II.12) ne peut plus être prise en compte. Donc, la variable  $\phi(O)$  doit être éliminée au préalable dans (II.12) avant d'appliquer la méthode de suppression; ceci signifie une transformation de la relation matricielle des contraintes manipulées initialement par l'utilisateur.

Avant la transformation, la relation matricielle des contraintes s'écrit

$$[A] \{u\} = \{b\} \quad (\text{II.13})$$

où  $[A]$  est la matrice (M,N) des coefficients des combinaisons linéaires,  $\{u\}$  est le vecteur de dimension N des variables concernées et  $\{b\}$  est le vecteur de dimension M des translations.

Le but est de transformer  $[A]$  en forme finale  $\begin{bmatrix} I & A'' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  où  $I$  est la matrice d'identité de dimension m, qui est inférieur à M, et  $[A'']$  est une matrice quelconque de taille (m, N - m).

La relation matricielle des contraintes prend la nouvelle forme

$$\begin{bmatrix} I & A'' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ u'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b' \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

ce qui donne

$$\{u'\} = -[A''] \{u''\} + \{b'\} \quad (\text{II.15})$$

dans laquelle  $\{u'\}$ ,  $\{u''\}$  et  $\{b'\}$  sont les vecteurs obtenus par transformation de  $\{u\}$  et  $\{b\}$ .

Cette transformation permet également de détecter l'existence des surcontraintes et d'obtenir le rang effectif de matrice des coefficients, qui seront des informations contextuelles très utiles pour l'utilisateur. A la fin, la relation matricielle des contraintes n'est constituée que les combinaisons linéaires "bien séparées" et en plus diagonalisée dans la partie haute gauche.

### II.2.3. Méthode d'élimination de Gauss [Lascaux-86]

La transformation de la matrice  $[A]$  peut être effectuée par la méthode d'élimination, connue sous le nom de méthode de Gauss. Il s'agit d'une méthode de base la plus courante pour la résolution numérique de systèmes d'équations linéaires.

Pour résoudre le système linéaire  $[A]\{u\}=\{b\}$  où  $[A]$  est une matrice à N lignes, dans la phase de descente on va le transformer en (N-1) étapes en un système équivalent  $[A_1]\{u\}=\{b_1\}$ , où  $[A_1]$  est une matrice triangulaire supérieure. Ensuite, dans la phase de remontée, on applique (N-1) étapes, qui conduisent à un système équivalent  $[A_2]\{u\}=\{b_2\}$ , où  $I$  est la matrice

d'identité et  $[A_2]$  prend la forme suivante

$$[A_2] = \begin{bmatrix} I & A'' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

La démarche est la suivante: en descente, la première étape de transformation est d'éliminer  $x_1$  des équations 2 à N, puis d'éliminer  $x_k$  des équations (k+1) à N où k est un entier variant entre 2 et N, et en remontée la première étape de transformation est d'éliminer de  $x_N$  des équations 1 à (N-1), puis d'éliminer  $x_k$  des équations 1 à (N-k) où k est un entier variant entre (N-1) et 1.

Cette transformation requiert de nombreuses opérations élémentaires, la précision numérique est alors délicate à contrôler et l'effort de calcul est souvent coûteux. Nous allons nous attacher à maîtriser ces facteurs.

### II.3. Transformation de Gauss avec précision

La méthode d'élimination de Gauss peut être exécutée localement ou globalement. Cette section est consacrée à analyser les méthodes locale et globale de transformation sans s'occuper pour l'instant du coût de la démarche.

#### II.3.1. Transformation locale et problème d'imprécision

La transformation locale est une opération "en ligne", l'élimination est effectuée sur le champ sans attendre que la création de toutes les combinaisons linéaires soit terminée. Lors de la création d'une nouvelle combinaison linéaire, toutes les combinaisons existantes, liées à cette combinaison linéaire, sont mises à jour par la méthode d'élimination. Alors une fois que la dernière combinaison linéaire est créée, la transformation est totalement accomplie.

##### *Intérêts*

La programmation est la plus facile à mettre en oeuvre. La génération séquentielle permet d'éviter le problème de stockage matriciel qui est intrinsèque à une méthode globale.

##### *Inconvénients*

La précision numérique n'est pas assurée. La raison réside dans le fait que la technique de pivot maximal est impossible à appliquer. Comme les combinaisons linéaires ne sont pas toutes connues au cours de la transformation, nous ne pouvons pas extraire la valeur maximale du pivot. Par conséquent, l'erreur d'arrondi des valeurs numériques peut fausser considérablement la précision de la solution.

##### *Influence du choix des pivots sur la précision de transformation*

Observons un exemple très simple montrant l'effet prépondérant du choix des pivots sur la précision de l'algorithme. Supposons que les valeurs sont représentées en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs. Soit le système



$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Choisissons le coefficient  $10^{-4}$  comme premier pivot. Après l'élimination de  $x_1$  dans la deuxième équation, on obtient le système équivalent:

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & 1 - 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 - 10^4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

qui, compte tenu des arrondis, sera en fait représenté par:

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -10^4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

La solution de ce nouveau système est  $x_2 = 1$  et  $x_1 = 0$ .

Choisissons maintenant la deuxième ligne comme ligne pivot. Après l'élimination de  $x_1$ , on obtient le système équivalent suivant, où l'on a laissé la ligne pivot en deuxième ligne:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 - 10^{-4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - 2 \cdot 10^{-4} \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

qui, compte tenu des erreurs d'arrondi, sera représenté par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

La solution de ce système est  $x_2 = 1$  et  $x_1 = 1$ .

Or la solution du système initial devrait être arrondie à  $x_1 = x_2 = 1$ . La première solution obtenue est complètement fautive, la deuxième est excellente. On observe donc l'efficacité du changement de pivot.

Dans le premier cas, les pivots valent  $10^{-4}$  et  $10^4$  alors que dans le second cas, ils valent 1 et 1. Dans les deux cas,  $x_2$  est obtenu avec la même petite erreur d'arrondi, mais au moment du calcul de  $x_1$ , cette erreur est divisée par 1 dans le second cas alors qu'elle est divisée par  $10^{-4}$  dans le premier cas, entraînant un effet déplorable sur la valeur de  $x_1$ .

### II.3.2. Transformation globale

A l'opposé, une transformation globale ne peut être effectuée qu'après la création de toutes les combinaisons linéaires. Contrairement au cas précédent, la méthode de pivot maximal est applicable.

### *Méthode de pivot maximal*

D'une façon générale, à la  $k^{\text{ème}}$  étape, si le coefficient  $A_k(k,k)$  n'est pas nul, on peut le choisir comme pivot et appliquer l'algorithme d'élimination sans effectuer de permutation de lignes. Mais les coefficients  $L(i,k)$  obtenus par la formule

$$L(i, k) = \frac{A_k(i, k)}{A_k(k, k)} \quad (\text{II.22})$$

sont inversement proportionnels au pivot. Or ces coefficients interviennent en multiplicateurs dans les formules de transformation. Les erreurs d'arrondi qui affectent déjà les coefficients  $A_k(i,k)$  pourront être amplifiées et viendront s'ajouter aux erreurs commises à l'étape  $k$ . Cette amplification est d'autant plus importante que le pivot est petit. On a donc intérêt à éviter de choisir des pivots trop petits. Pour cela, à la  $k^{\text{ème}}$  étape, on choisit comme ligne pivot, une ligne d'indice  $p$  telle que

$$|A_k(p, k)| = \max_{k \leq i \leq N} |A_k(i, k)| \quad (\text{II.23})$$

### *Intérêts*

La technique de pivot maximal permet de transformer la matrice avec précision et sa mise en oeuvre est relativement simple.

### *Inconvénients*

La gestion des conditions aux limites est globale. Donc le stockage globale en mémoire de la matrice des contraintes est nécessaire pour permettre la manipulation des coefficients de la matrice des coefficients qui changent continuellement d'une étape à l'autre. La place mémoire croît avec le carré du nombre de combinaisons linéaires, ce qui peut devenir irréalisable.

## **II.4. Transformation de Gauss économique**

Pour assurer la précision de la transformation, la méthode globale est préférable à la méthode locale. D'où le facteur économique doit être étudiée pour maintenir le coût du calcul et la place mémoire nécessaire dans une mesure acceptable. L'efficacité de la méthode de Gauss sera améliorée à l'aide d'un découpage en morceaux indépendants, et la place mémoire sera mieux utilisée en adoptant un stockage creux de la matrice des coefficients.

### II.4.1. Efficacité et découpage en morceaux indépendants

L'élimination de chaque ligne entraîne la mise à jour des coefficients de toutes les lignes de matrice des contraintes. Il faut donc de nombreux passages pour accomplir entièrement la transformation. Plus la taille de la matrice des coefficients est importante, plus la rapidité de la transformation se dégrade. L'idée principale de la méthode de découpage consiste à décomposer la matrice initiale en sous matrices indépendantes pour que le nombre nécessaire de passages soit plus petit. Cette décomposition est réalisée en permutant des lignes et des colonnes de la

matrice des coefficients de façon à regrouper par bloc des sous matrices indépendantes. La matrice globale  $[A]$  est alors transformée en  $n^2$  sous matrices dans lesquelles les sous matrices non "diagonales" sont nulles. Par exemple si  $n = 2$ , la matrice transformée prend la forme suivante

$$\begin{bmatrix} A_{mn} & 0_{mq} \\ 0_{pn} & A_{pq} \end{bmatrix} \text{ dans laquelle } A_{mn} \text{ et } A_{pq} \text{ sont les sous matrices de dimensions } (m,n) \text{ et } (p,q).$$

La génération globale sans découpage de  $[A]$  nécessite une place mémoire de  $(m+p)(n+q)$  réels. Obtenu par la décomposition en deux sous matrices indépendantes, elle ne nécessite qu'une place mémoire de  $mn+pq$  réels, et le coût du calcul est considérablement amélioré, en particulier pour les conditions Dirichlet où les sous matrices se réduisent à des scalaires ( $m = n = 1$ ).

#### *Intérêts*

La transformation est à la fois rapide et précise. La place mémoire nécessaire est moins importante qu'en cas de génération sans découpage en morceaux indépendants.

#### *Inconvénients*

La programmation est plus compliquée. Il est possible que la taille des sous matrices reste toujours importante, comme par exemple le cas de grandes faces à condition flottante, illustré par la suite.

### II.4.2. Problème de stockage

En cas de condition flottante sur un plan contenant  $n$  noeuds, la taille de la sous matrice  $A_1$  concernée est au moins  $n(n-1)$  réels même après avoir appliqué le découpage de la matrice initiale en morceaux indépendants. En effet

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_2 & & = v_1 \\ & v_3 & = v_1 \\ & \dots & \\ & & v_n = v_1 \end{array} \right. \quad (\text{II.24})$$

Si  $n$  est élevé, cela conduit à un problème de taille mémoire. Heureusement, la matrice des coefficients est souvent très creuse, donc on a intérêt à la ranger efficacement.

### II.4.3. Rangement des matrices [Lascaux-86]

La matrice peut être rangée par différentes méthodes (cf. Annexe). Lorsque l'on considère les matrices étudiées comme des matrices pleines, en ne tenant pas compte de la nullité de coefficients, le rangement des coefficients est très simple. Dans le cas contraire, il faut utiliser un rangement bien choisi. Le rangement profil permet de ne stocker que les coefficients à l'intérieur du profil. Parmi les méthodes qui ne stockent aucun zéro, il existe deux méthodes de rangement, rangement ligne par ligne et rangement désordonné. Ces méthodes sont présentées dans l'annexe où un choix de la méthode de rangement est également effectué.

La méthode retenue est celle de rangement désordonné, qui est la plus adaptée à la transformation de Gauss de la relation matricielle des contraintes dont la matrice des coefficients est souvent rectangulaire et non symétrique. Le problème de mémoire est ainsi traité par stockage creux.

## II.5. Procédure de la génération robuste

### *Choix de méthode*

Nous cherchons une méthode répondant au mieux à nos attentes. Nos critères de choix se basent sur la précision, la rapidité et l'économie. Le choix de la méthode, guidé par ces critères, se déroule alors à travers trois étapes comme illustré à la figure II.2.

Premièrement, la transformation locale est éliminée car la précision numérique n'est pas assurée. Ensuite, la technique de découpage en morceaux indépendants est retenue du fait qu'elle favorise la rapidité et minimise le coût de la procédure. Enfin, le rangement désordonné de la matrice creuse est adopté en vue d'éviter l'explosion de la place mémoire requise.

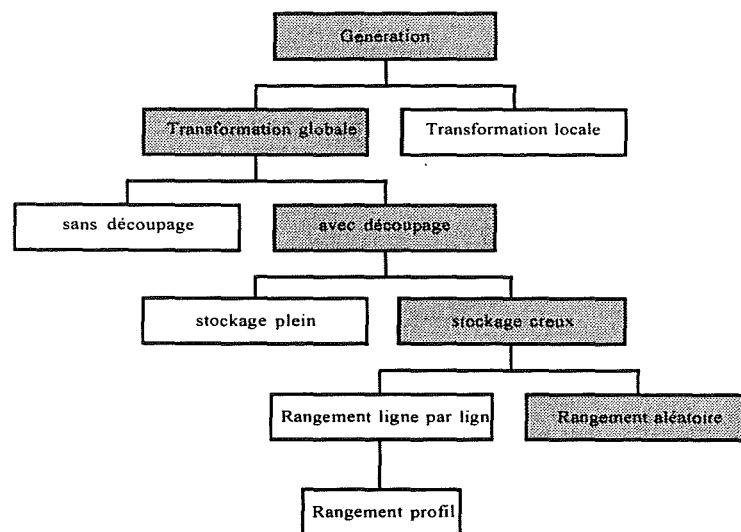


Figure II.2. Schéma du choix de méthode

En résumé, la méthode retenue est la méthode d'élimination globale de Gauss en découpant au préalable en morceaux indépendants et en rangeant aléatoirement la matrice des coefficients.

### *Procédure de la génération*

La génération des conditions aux limites se déroule en plusieurs étapes. Après avoir créé toutes les conditions aux limites du problème étudié sous forme de combinaisons linéaires, la matrice des contraintes est découpée en sous matrices indépendantes de taille plus petite. Dans chaque sous matrice, les lignes et colonnes sont permutées par la méthode de pivot maximal pour effectuer l'élimination de Gauss dans la mesure d'un rangement aléatoire de la matrice. Enfin, toutes les combinaisons linéaires représentant les conditions aux limites sont mises à jour.

## II.6. Domaine d'application

### II.6.1. Utilisation rationnelle du potentiel scalaire réduit [Luong-96]

La génération robuste des conditions aux limites discutée précédemment nous permet de manipuler avec sûreté des ensembles complexes de conditions aux limites, telle que ceux produits par une utilisation rationnelle du potentiel scalaire réduit.

#### *Pourquoi une utilisation rationnelle du potentiel réduit ?*

Considérons un domaine d'étude contenant un ensemble des conditions de type Dirichlet, Neumann et périodique. Dans la formulation "traditionnelle" en potentiel scalaire réduit, la condition à champ normal prend souvent la forme d'une condition de type Dirichlet homogène. Cependant, dans un grand nombre de problèmes physiques, cette condition est très contraignante voire impossible à satisfaire [Pissanetzky-90] [Maréchal-91].

En phase de calcul du champ source, cette condition traditionnelle implique une prise en compte de tous les inducteurs, y compris ceux qui sont en dehors du domaine d'étude. Un tel problème en deux dimensions est illustré à la figure II.3a. Hormis cette contrainte d'utilisation, l'obligation de décrire tous les inducteurs conduit à un effort important de calcul du champ source qui est multiplié par le nombre d'inducteurs décrits, ce qui allonge considérablement le temps global de résolution. Nous souhaitons une démarche qui permette de réduire le nombre d'inducteurs comme l'illustre la figure II.3b. Dans ce cas, la condition du plan  $\Gamma_H$  à champ normal doit être reformulée.

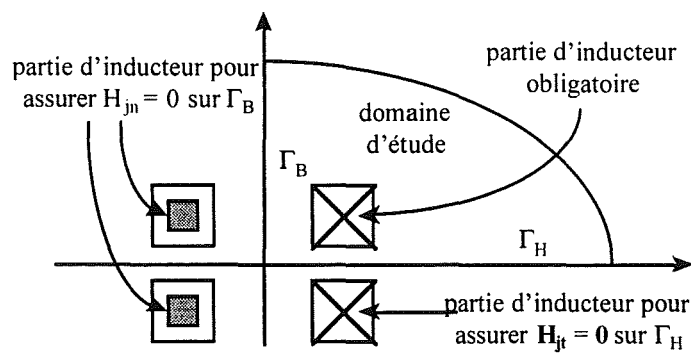


Figure II.3a. Contribution de tous les inducteurs

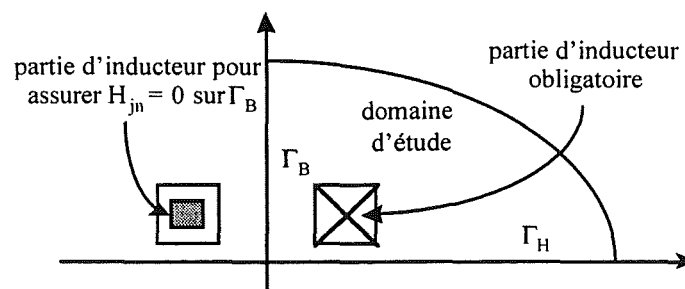


Figure II.3b. Réduction des inducteurs

D'autre part, certains problèmes ne peuvent être traité qu'imparfaitement avec la formulation traditionnelle en potentiel scalaire réduit. Considérons le problème infiniment périodique comportant des inducteurs, montré à la figure II.4a. L'étude d'un motif du problème n'est possible qu'à condition de décrire un nombre suffisant d'inducteurs avant et après le motif étudié (figure II.4b). Il est alors préférable de travailler sur un modèle basé sur une seule période qui ne comporte qu'un minimum d'inducteurs (figure II.4c).

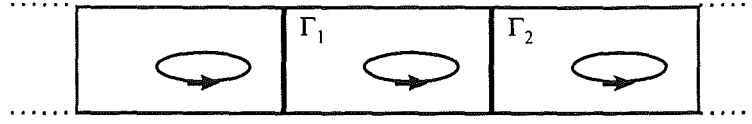


Figure II.4a. Modèle infiniment périodique comportant tous les inducteurs

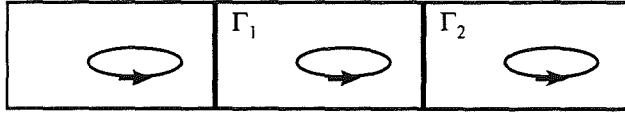


Figure II.4b. Modèle comportant un nombre suffisant d'inducteurs      Figure II.4c. Modèle avec une seule période

#### II.6.1.1. Conditions étendues utilisant le potentiel scalaire réduit

Pour traiter ces problèmes, il faut mieux formaliser les conditions aux limites sur la frontière à champ normal ainsi que les conditions périodique et antipériodique.

##### Frontière à champ normal

Il s'agit de l'interface des régions infiniment perméables et des plans de symétrie à champ normal.

$$\phi = \text{constante} \quad \text{frontière des régions perméables} \quad (\text{II.25})$$

$$\phi_r - \Delta\phi = \text{constante} \quad \text{frontière de l'air} \quad (\text{II.26})$$

Cette condition permet d'étendre jusqu'au cas où  $\Gamma_H$  n'est pas un plan de symétrie.

##### Condition périodique entre $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ (figure II.4)

$$\phi|_{\Gamma_1} = \phi|_{\Gamma_2} \quad \text{frontière des régions perméables} \quad (\text{II.27})$$

$$(\phi_r - \Delta\phi)|_{\Gamma_1} = (\phi_r - \Delta\phi)|_{\Gamma_2} \quad \text{frontière de l'air} \quad (\text{II.28})$$

##### Condition antipériodique entre $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ (figure II.4)

$$\phi|_{\Gamma_1} = -\phi|_{\Gamma_2} \quad \text{frontière des régions perméables} \quad (\text{II.29})$$

$$(\phi_r - \Delta\phi)|_{\Gamma_1} = -(\phi_r - \Delta\phi)|_{\Gamma_2} \quad \text{frontière de l'air} \quad (\text{II.30})$$

Les conditions périodique et antipériodique permettent de restreindre le motif étudié à une seule période.

Etant donné que le calcul du champ source est souvent une procédure coûteuse en temps de CPU, surtout pour les bobines volumiques et pour les problèmes contenant de nombreux inducteurs, l'utilisation rationnelle du potentiel réduit semble incontournable.

### II.6.1.2. Application au ralentisseur magnétique 3D

L'utilisation rationnelle du potentiel scalaire réduit est employée dans cette section pour modéliser le ralentisseur magnétique tridimensionnel en fonctionnement magnétostatique.

#### Description du ralentisseur

Les ralentisseurs électromagnétiques sont des machines électriques tournantes dont la vocation est de ralentir un véhicule.

Le principe du ralentisseur électromagnétique est basé sur la loi de Lenz: la création d'une force dont les effets s'opposent aux causes qui l'ont engendrée. C'est pourquoi, lorsque le véhicule est arrêté, il n'existe plus de couple de freinage.

Le rotor est constitué de deux disques qui sont solidaires de l'arbre de transmission. Entre ces deux disques, une série de bobines de polarité alternée est fixée au châssis du véhicule. Dès que les bobines sont alimentées, les courants induits qui apparaissent dans les rotors développent un couple de freinage. La géométrie partielle du ralentisseur et son plan de coupe avec ses différents types de frontières sont présentés aux figures II.5 et II.6.

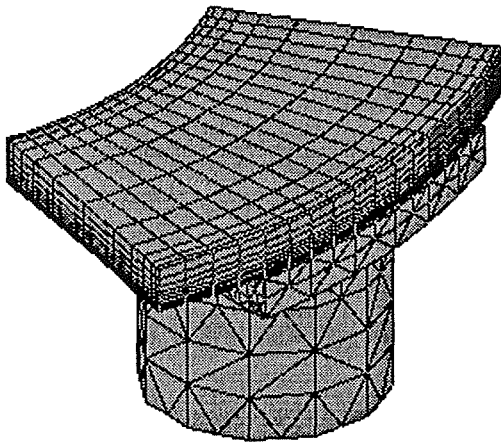


Figure II.5. Géométrie et maillage d'une période

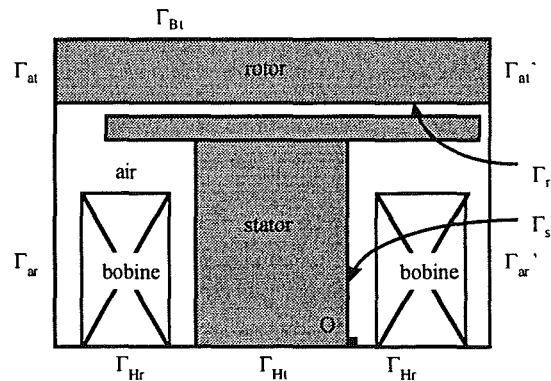


Figure II.6. Ensemble de frontières

Le ralentisseur possède une structure périodique de huit bobines. Il est modélisé par la formulation en potentiels réduit et total. Sur la figure II.6, le premier indice "a" représente la condition antipériodique, "H" représente la condition à champ magnétique normal, "B" représente la condition à induction tangentielle, "r" représente le couplage entre air et rotor, et "s" représente le couplage entre air et stator. Les seconds indices "r" and "t" correspondent respectivement à l'utilisation des potentiels réduit et total.

Le système des conditions aux limites peut se résumer aux relations suivantes [Luong-96]

$$\phi|_{\Gamma_{at}} = -\phi|_{\Gamma'_{at}} \quad \text{frontière du rotor} \quad (\text{II.31})$$

$$(\phi_r - \Delta\phi)|_{\Gamma_{ar}} = -(\phi_r - \Delta\phi)|_{\Gamma'_{ar}} \quad \text{frontière de l'air} \quad (\text{II.32})$$

$$\phi = \phi_r - \Delta\phi \quad \text{sur } \Gamma_s \text{ et } \Gamma_r \quad (\text{II.33})$$

$$\phi = \text{constante} \quad \text{sur } \Gamma_{Ht} \quad (\text{II.34})$$

$$\phi_r - \Delta\phi = \text{constante} \quad \text{sur } \Gamma_{Hr} \quad (\text{II.35})$$

$$\phi(O) = 0 \quad \text{au point } O \in \Gamma_s \cap \Gamma_{Ht} \quad (\text{II.36})$$

$$\Delta\phi(O) = 0 \quad \text{au point } O \in \Gamma_s \cap \Gamma_{Ht} \quad (\text{II.37})$$

dans lesquelles

- (II.31) et (II.32) assurent la condition antipériodique sur le champ magnétique
- (II.33) assure la continuité tangentielle du champ magnétique à l'interface de couplage
- (II.34) et (II.35) assurent l'aspect normal du champ magnétique
- (II.36) et (II.37) assurent l'unicité de  $\phi$ ,  $\Delta\phi$  dans tout le domaine

Selon le nombre de bobines utilisées, le ralentisseur magnétique est modélisé par différents modèles. Le premier utilise toutes les bobines (figure II.7a), le second utilise une seule bobine qui touche le domaine d'étude (figure II.7b) et le dernier n'utilise que la moitié de cette bobine (figure II.7c).

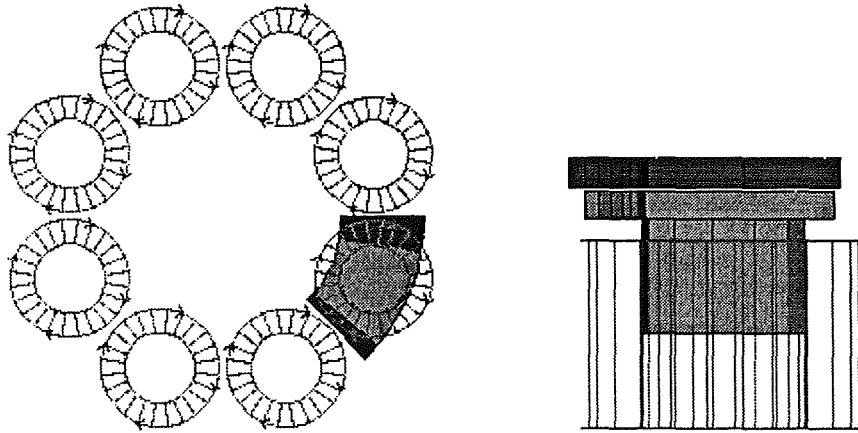


Figure II.7a. Modèle à 8 bobines



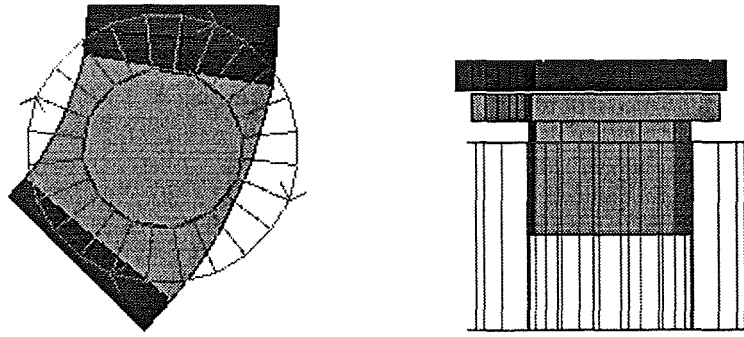


Figure II.7b. Modèle à 1 bobine

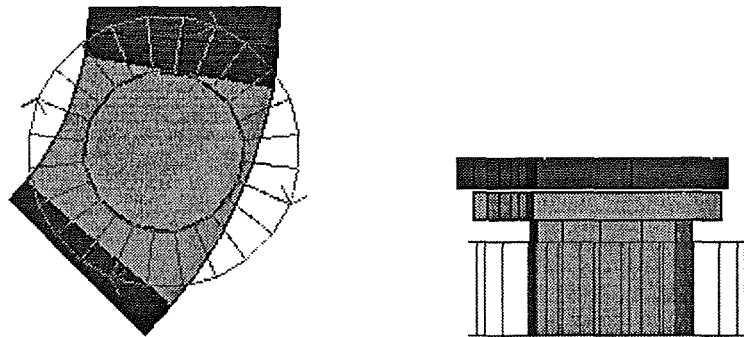


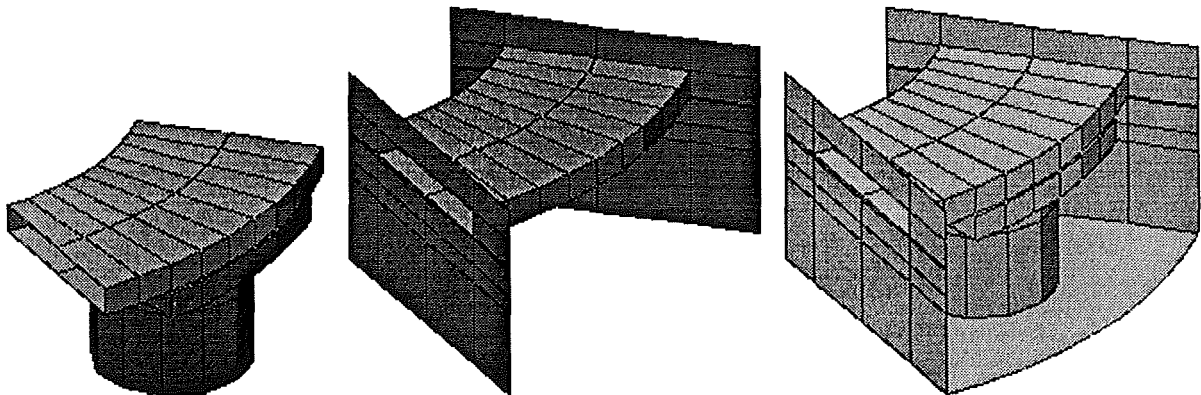
Figure II.7c. Modèle à 1/2 bobine

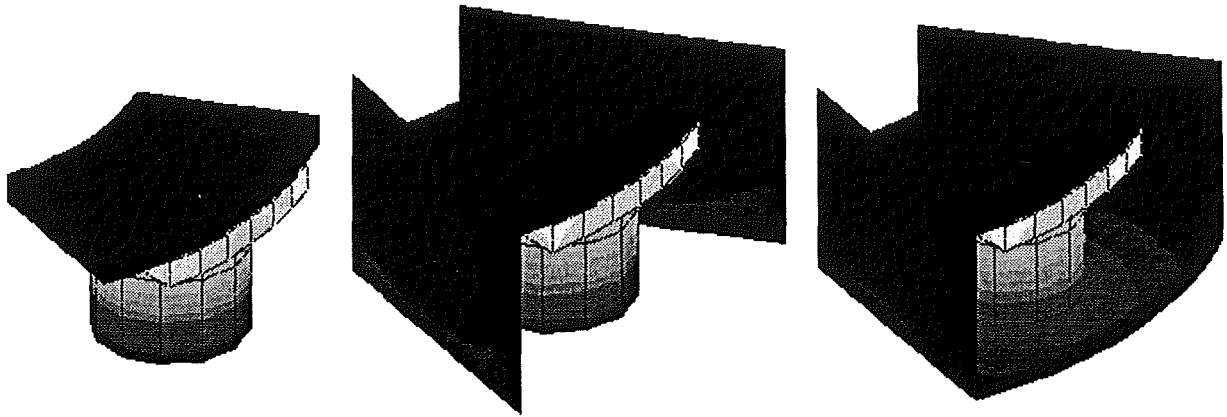
En tenant compte de la direction de  $\mathbf{H}_j$  sur les frontières  $\Gamma_{Hr}$ ,  $\Gamma_{ar}$  et  $\Gamma'_{ar}$ , nous remarquons que

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{Hr}, \Gamma_{ar} \text{ et } \Gamma'_{ar} \quad \text{dans le premier modèle} \quad (\text{II.38})$$

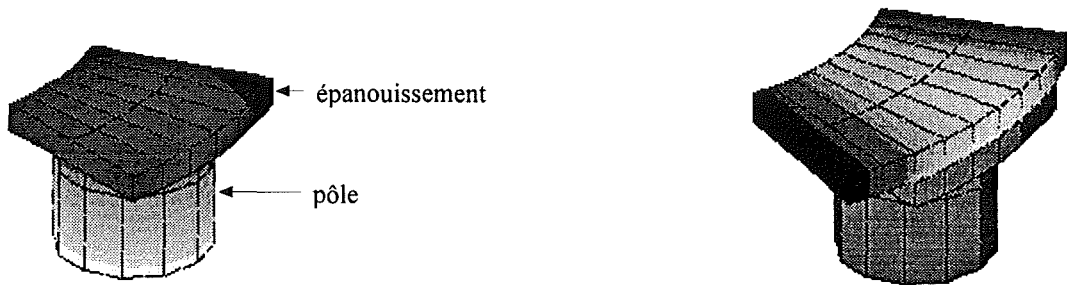
$$\Delta\phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{Hr} \quad \text{dans le second modèle} \quad (\text{II.39})$$

Le support surfacique de calcul et la distribution du potentiel source  $\Delta\phi$  sont montrés aux figures II.8 et II.9 conformément aux trois modèles mentionnés.

Figure II.8. Support de calcul de  $\Delta\phi$  pour les modèles à 8, 1 et 1/2 bobines

Figure II.9. Distribution de  $\Delta\phi$  pour les modèles à 8, 1 et 1/2 bobines

La distribution du potentiel total est illustrée par les figures II.10 et II.11.

Figure II.10. Distribution de  $\phi$  dans le pôle et l'épanouissement    Figure II.11. Distribution de  $\phi$  dans l'induit

Les résultats obtenus par trois modèles sont résumés au tableau II.1. Pour comparer quantitativement ces trois modèles, nous avons également calculé le flux traversant l'interface entre le pôle et l'épanouissement du ralentisseur.

Tableau II.1  
Comparaison des cas possédant différents nombres de bobines

Modèle	1	2	3
nombre de bobines	8	1	1/2
support de calcul surfacique	+ couplage	+ couplage + antipériodique	+ couplage + antipériodique + champ normal $\Gamma_{Hr}$
nombre d'éléments	1542 + 7971	1918 + 7971	2074 + 7971
nombre d'inconnues	1162 + 4233	1416 + 4233	1525 + 4233
nombre de coefficients non nuls	7480 + 50578	8867 + 50578	9400 + 50578
place mémoire (MB)	0,2 + 1,0	0,2 + 1,0	0,2 + 1,0
nombre moyen d'itérations linéaires	34 + 28	44 + 23	44 + 23
temps de couplage (s)	55	45	44
station	HP 750	HP 750	HP 750
Flux traversant l'interface pôle – épanouissement (Wb)	0,043429	0,043950	0,043211
temps total de CPU (s)	55 + 466	45 + 451	44 + 449

Comme l'effort de calcul de  $\mathbf{H}_j$  dépend du nombre de bobines utilisées, plus le nombre de bobines diminue, plus la résolution est rapide. Les résultats obtenus de ces trois modèles sont très cohérents.

### II.6.2. Autres applications

L'intérêt de la génération robuste des conditions aux limites dépasse évidemment largement la limite du problème magnétostatique étudié. Elle est applicable également aux problèmes qui doivent gérer un système d'équations avec un ensemble complexe des conditions aux limites.

Nous l'avons appliqué pour gérer les conditions aux limites en magnétostatique, en magnétodynamique (cf. partie B) dans lequel le problème magnétique est couplé avec le circuit électrique (cf. chapitre VI) ou avec le mouvement [Perrin-92] (cf. chapitre VIII). La génération robuste est également indispensable pour automatiser la mise en oeuvre, ce qui sera présentée au chapitre VII.

## **II.7. Conclusions**

Nous avons choisi la méthode de suppression des équations pour introduire les conditions aux limites dans le système global. Nous avons mis en évidence le problème lié aux conditions aux limites « mal séparées », ce qui conduit à un dysfonctionnement de la méthode de suppression des équations. L'intérêt d'une transformation initiale des conditions aux limites a été également clarifié.

Nous avons élaboré une méthode qui permet de transformer l'ensemble de conditions aux limites avec précision et économie. Il s'agit d'une transformation globale utilisant un découpage en morceaux indépendants et dans laquelle la matrice creuse est rangée aléatoirement. La méthode de Gauss utilisant le pivot maximal a été utilisée pour garantir la précision de la transformation.

L'outil développé nous a permis une utilisation rationnelle du potentiel scalaire réduit illustrée à travers la modélisation du ralentisseur magnétique. Les autres applications ont été également mentionnées.

## Références

- [Dhatt-84] *G.Dhatt et G. Touzot*, "Une présentation de la méthode des éléments finis", livre, collection université de Compiègne, Maloine S.A. éditeur, 1984.
- [Lascaux-86] *P. Lascaux et R. Théodor*, "Analyse Numérique matricielle appliquée à l'art de l'Ingénieur, tome 1", Masson éditeur, 1986.
- [Luong-96] *H.T. Luong, Y. Maréchal, P. Labie, C. Guérin et G. Meunier*, "Formulation of Magnetostatic Problems in terms of Source, Reduced and Total Scalar Potentials", Proc. Electrical and Magnetic Fields, Liège (Belgium), 1996, pp. 321-326.
- [Maréchal-91] *Y. Maréchal*, "Modélisation des Phénomènes Magnétostatiques avec Terme de Transport. Application aux Ralentisseurs Electromagnétiques", *Thèse de Docteur - Ingénieur, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1991.
- [Maréchal-97] *Y. Maréchal, H.T. Luong et G. Meunier*, "Robust Generation of Complex Set of Boundary Conditions for Modelling 3D Electromagnetic Fields", soumis à COMPUMAG 1997.
- [Perrin-92] *R. Perrin-Bit*, "Modélisation des Machines Electriques Tournantes par la Méthode des Eléments Finis Tridimensionnels: Calcul des Grandeurs Magnétiques avec Prise en Compte du Mouvement", thèse de l'INPG, 1992.
- [Pissanetsky-90] *S. Pissanetsky, Y. Xiang*, "The Extended Two Scalar Potential Formulation for 3D Nonlinear Magnetostatics", *COMPEL*, vol. 9, Supp. A, pp. 21-24, 1990.
- [Simkin-79] *J. Simkin and C.W. Trowbridge*, "On the Use of the Total Potential in the Numerical Solution of Field Problems in Electromagnetic", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14 (1979), pp. 423-439.



CHAPITRE III

**TRAITEMENT DU PROBLEME DE  
CONNEXITE**



## Chapitre III. Traitement du problème de connexité

### Situation

*L'utilisation du potentiel scalaire total améliore la précision dans les régions perméables. Mais la présence des circuits magnétiques fermés ne permet pas l'utilisation d'un potentiel scalaire total continu.*

### Question du chapitre

*En tenant compte du problème de connexité, peut-on conserver dans les régions perméables l'utilisation du potentiel scalaire magnétique ?*

### Démarche directrice

*La précision dans les régions perméables est améliorée en utilisant le potentiel scalaire total. Le problème de connexité est pris en compte en autorisant la discontinuité du potentiel total dans les circuits magnétiques fermés par introduction de la coupure ayant un saut de potentiel de part et d'autre de ses côtés.*

### III.1. Introduction

La présence des circuits magnétiques fermés pose des problèmes tant sur la validité de la démarche en potentiel réduit que sur la précision du calcul.

Il est évident que dans la mesure où le champ magnétique est faible dans la région perméable, l'utilisation du potentiel réduit n'est pas souhaitable puisque le problème d'imprécision peut se produire (cf. chapitre I). Il faut remarquer cependant que cette constatation n'est pas toujours applicable car il est fort possible que le champ magnétique reste important malgré une perméabilité élevée de la région.

Par exemple dans un tore ferromagnétique fermé comme illustré à la figure III.1, le champ magnétique n'est pas du tout négligeable.

$$H \approx \frac{I}{l_{\text{moy}}} \quad (\text{III.1})$$

dans lequel  $l_{\text{moy}}$  est le rayon moyen du tore, et  $I$  est le courant total passant le centre.

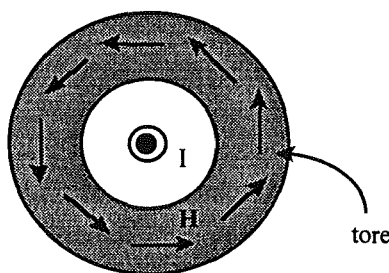


Figure III.1. Tore ferromagnétique fermé et champ magnétique non négligeable



En réalité, dans les circuits magnétiques non linéaires, il peut arriver que le matériau soit saturé en certains points dont la perméabilité est très faible. L'existence de ces points entraîne des diminutions locales du champ magnétique dans le matériau magnétique et le problème d'imprécision se pose à nouveau. Dans le cas général, le concepteur ne connaît pas à l'avance l'ordre de la grandeur du champ, et donc les domaines où l'utilisation du potentiel scalaire réduit reste sûre. Par ailleurs, pour les problèmes évolutifs, le champ dans les régions perméables peut être très faible, par exemple en phase de démarrage.

Vu les raisonnements précédents, l'utilisation du potentiel réduit ne permet pas toujours d'obtenir la précision souhaitée dans les circuits magnétiques fermés. D'autre part, la démarche adoptée au chapitre I montre la précision du calcul en potentiel total dans les régions perméables. Cette démarche reste toujours valable dans le cas des circuits magnétiques fermés, et permet d'éviter le risque de perte de précision. L'utilisation du potentiel scalaire total dans les circuits magnétiques fermés se heurte cependant au problème de connexité.

Le but de ce chapitre est de chercher à traiter le problème de connexité en utilisant le potentiel scalaire total dans les circuits magnétiques fermés.

### III.2. Problème de connexité

L'utilisation du potentiel scalaire total est limitée par des considérations topologiques, que l'on appelle problème de connexité [Vérité-87].

#### III.2.1. Mise en évidence pratique

Pour s'en convaincre, considérons l'exemple de la figure III.2. Il s'agit d'un tore décrit en potentiel scalaire total et d'une boucle de courant passant par le tore.

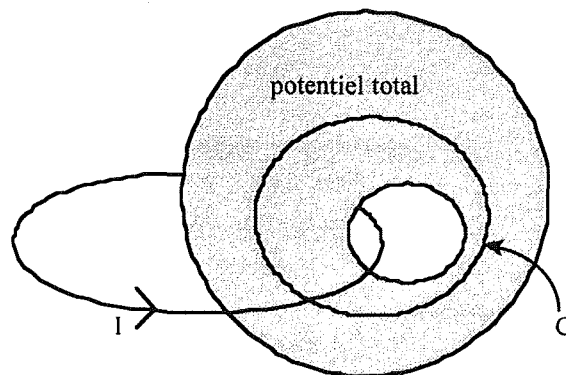


Figure III.2. Illustration du problème de connexité en potentiel scalaire total

La circulation du champ magnétique sur un contour C inclus dans le tore s'écrit:

$$\oint_C \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I \quad (\text{III.2})$$

où  $I$  est le courant total traversant la surface soutenue par le contour  $C$ .

Dans l'exemple considéré, ce courant n'est pas nul alors que la circulation du champ calculée avec le potentiel scalaire total doit s'annuler par nature de ce potentiel

$$\oint_C \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = - \oint_C \text{grad } \phi \, d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{III.3})$$

ce qui est contradictoire avec (III.2).

Cette contradiction vient du fait que la continuité du potentiel scalaire total dans le circuit magnétique fermé induit à la nullité de l'intégrale de  $\text{grad } \phi$  sur une boucle fermée. Cette considération suscite l'idée de conserver l'utilisation du potentiel total en autorisant la discontinuité de celui-ci.

### III.2.2. Solution du problème de connexité

Le problème de connexité a fait l'objet de nombreuses études approfondies depuis des années [Webb-89] [Vérité-87] [Albanese-90] [Golias-94] [Golovanov-97] [Ren-96] [Gyimesi-92] [Gyimesi-92b] [Luong-96]. Cette partie tente d'effectuer une synthèse de ces travaux

#### *III.2.2.1. Analyse générale*

Comme nous avons vu dans le chapitre I, le champ magnétique est décomposé en général en deux composantes vectorielles

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad } \Omega \quad (\text{III.4})$$

dans lequel  $\mathbf{H}_s$  est le champ source dont le rotationnel représente la densité de courant  $\mathbf{J}_s$ , et  $\Omega$  est le potentiel scalaire magnétique utilisé.

D'un point de vue global, le problème de connexité peut être résolu soit en présence de  $\mathbf{H}_s$  soit en l'absence de  $\mathbf{H}_s$ .

Dans les formulations en potentiel scalaire magnétique en présence de  $\mathbf{H}_s$ , le problème de connexité est naturellement résolu par la présence de  $\mathbf{H}_s$  mais il convient dans ce cas de soigner la précision du calcul dans les régions perméables [Webb-89] [Albanese-90] [Golias-94] [Golovanov-97] [Ren-96] [Gyimesi-92] [Gyimesi-92b].

En revanche, en l'absence de  $\mathbf{H}_s$ , ce qui revient à utiliser un potentiel total dans les circuits magnétiques fermés, une procédure spécifique doit être envisagée pour autoriser la discontinuité du potentiel total [Vérité-87] [Luong-96]. Cette discontinuité est effectuée grâce à l'introduction d'une surface de coupure sur laquelle le potentiel total fait un saut. Vu la démarche que nous avons adoptée dès le premier chapitre, c'est la seule solution qui nous convient pour traiter les circuits fermés.

### III.2.2.2. Solution utilisant la coupure à saut de potentiel [Vérité-87] [Luong-96]

Cette méthode traite le problème de connexité en autorisant la discontinuité du potentiel total dans les régions ferromagnétiques multiplement connexes telles que les circuits magnétiques fermés. Le principe consiste à introduire une surface de coupure ayant un saut de potentiel dans ces régions.

#### Intérêts

La formulation traditionnelle en potentiels réduit et total reste utilisable. La précision dans les régions perméables est assurée à l'aide du potentiel total. En cas de symétrie à champ normal, la coupure devient tout simplement une condition de type flottant et aucun changement de programmation n'est nécessaire.

#### Inconvénients

L'introduction de la coupure entraîne un supplément de code. Par ailleurs, des nouvelles conditions d'interface sont à imposer sur les faces en regard de la coupure pour que la résolution puisse se dérouler correctement.

## III.3. Coupure et saut de potentiel

L'utilisation de la coupure permet de conserver la démarche habituelle de la formulation en potentiels réduit et total. Mais il reste à résoudre la création de coupure et tous ses effets secondaires, à savoir la mise en oeuvre des éléments coques, l'adaptation au maillage standard et la création automatique des coupures.

### III.3.1. Création de coupure

La première étape à franchir demeure la création de coupure en utilisant des éléments surfaciques de type coque. Lors de la création des éléments coques, les noeuds initiaux appartenant à ces éléments sont dédoublés pour que le potentiel scalaire total soit différent de part et d'autre de la coupure, ce qui autorise la discontinuité du potentiel à travers la coupure. Une telle mise en oeuvre pose des problèmes de redistribution des noeuds dédoublés vers les éléments finis qui les touchent. Par ailleurs, pour améliorer la facilité d'utilisation, la création automatique de coupure est également abordée dans cette section.

#### III.3.1.1. Élément coque [Guérin-94]

Les éléments de type coque, que nous appelons par abus de langage éléments coques, autorisent la discontinuité du potentiel total. Sur les côtés de ce type d'éléments, les inconnues sont dédoublées en dédoublant ses noeuds.

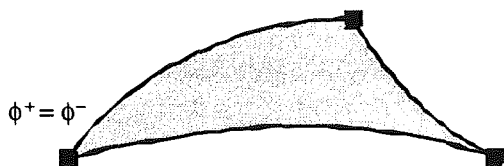


Figure III.3. Imposition de la continuité du potentiel dans les éléments classiques

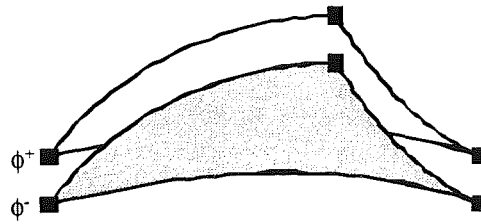


Figure III.4. Autorisation de la discontinuité du potentiel dans les éléments coques

### III.3.1.2. Allocation des noeuds dédoublés aux éléments surfaciques

Les difficultés de création de coupure résident dans la redistribution de noeuds dédoublés vers les éléments finis concernés, essentiellement vers les éléments surfaciques «classiques» qui touchent la coupure.

La résolution par la formulation en potentiels réduit et total consiste à calculer dans un premier temps la distribution du potentiel source (cf. chapitre I) sur l'interface de couplage ainsi que les surfaces de coupure. Il est alors nécessaire de séparer physiquement dès la résolution du potentiel source les noeuds dédoublés des éléments surfaciques afin d'obtenir à la deuxième résolution la séparation souhaitée du potentiel total. Cependant, une mauvaise redistribution des noeuds dédoublés vers les éléments surfaciques «classiques», telle que nous allons la présenter dans cette section, peut conduire à un inapte maillage pour le problème considéré.

Pour redistribuer les noeuds dédoublés vers les éléments finis concernés, il faut d'abord distinguer, parmi les éléments touchant la coupure, les éléments qui sont "au-dessous" ou "au-dessus" de la coupure. A partir d'un élément coque quelconque, nous déterminons ses deux éléments volumiques voisins et ensuite la recherche par voisinage est effectuée pour obtenir à la fin, parmi les éléments volumiques touchant la coupure, deux groupes d'éléments volumiques situés de part et d'autre de la coupure.

La coupure utilisée peut être limitée ou au contraire étendue jusqu'à l'infinie.

Pour les coupures sans limites [Guérin-94], la recherche par voisinage ne pose pas de problèmes car les deux groupes d'éléments sont complètement séparés et ils n'ont aucun noeuds en commun. En dépit de sa facilité de mise en oeuvre, une coupure sans limites n'est pas naturelle, car seule la partie utile de la coupure se situe dans le circuit magnétique. En plus, ce type de coupure demande une intervention supplémentaire de l'utilisateur sur la géométrie pour couper en deux le domaine d'étude.

En contrepartie, la coupure limitée est plus élégante à manipuler, mais elle est également plus difficile à gérer car les deux groupes d'éléments ne sont pas totalement séparés mais se rencontrent en certaines parties du domaine d'étude. Par convention, nous appelons facettes de jonction les facettes qui possèdent au moins un noeud commun avec les éléments volumiques des deux groupes différents. Si les facettes de jonction sont mal placées, le maillage généré peut devenir complètement inutilisable.

Pour mettre en évidence une erreur éventuelle de maillage, considérons de près la partie de connexion entre l'interface de couplage entre potentiels réduit et total et la surface de coupure illustrée par la figure III.5.

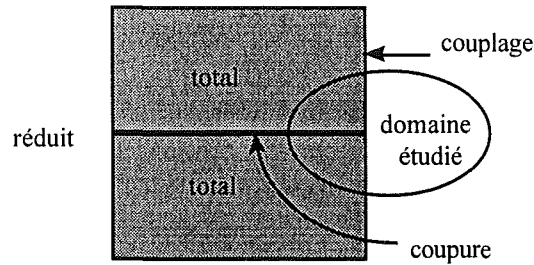


Figure III.5. Domaine étudié du dysfonctionnement éventuel du maillage

Nous allons voir que la façon dont les deux groupes d'éléments de part et d'autre de la coupure se joignent joue un rôle important sur la validité du maillage. Les facettes de jonction sont obtenues par recherche de voisinage à partir deux éléments volumiques de départ qui partagent le même élément surfacique coque et elles se trouvent soit dans l'air soit dans le matériau magnétique.

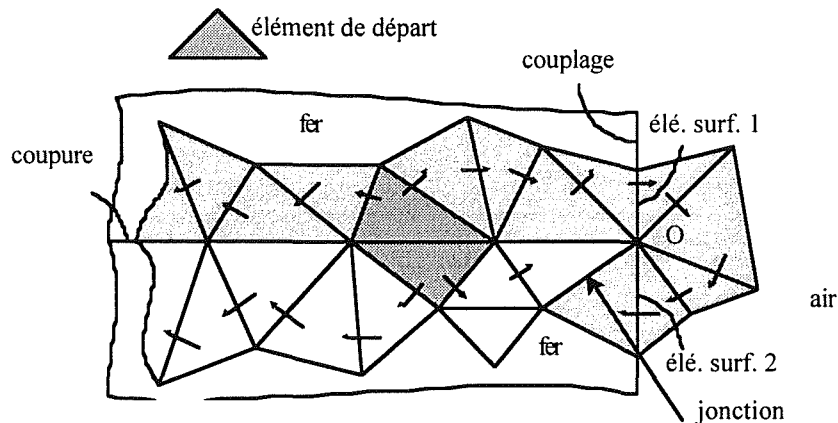


Figure III.6. Recherche par voisinage dont la facette de jonction se trouve dans le fer

Si les facettes de jonction se trouvent dans le matériau magnétique (figure III.6), les éléments surfaciques 1 et 2 de l'interface de couplage appartiennent alors au même groupe d'éléments. Par conséquent, le noeud dédoublé "au-dessus" de O appartient à tous les deux éléments surfaciques 1 et 2, ce qui signifie une perte de séparation en point O de part et d'autre de la coupure au niveau des éléments surfaciques. Donc le maillage n'est pas apte à effectuer la résolution.

Par contre, si la facette de jonction se trouve dans l'air (figure III.7), chaque noeud dédoublé de O est distribué à un seul élément surfacique soit 1 soit 2, les éléments surfaciques de l'interface de couplage sont alors bien séparés de part et d'autre de la coupure. Le maillage est alors correct pour effectuer la résolution.

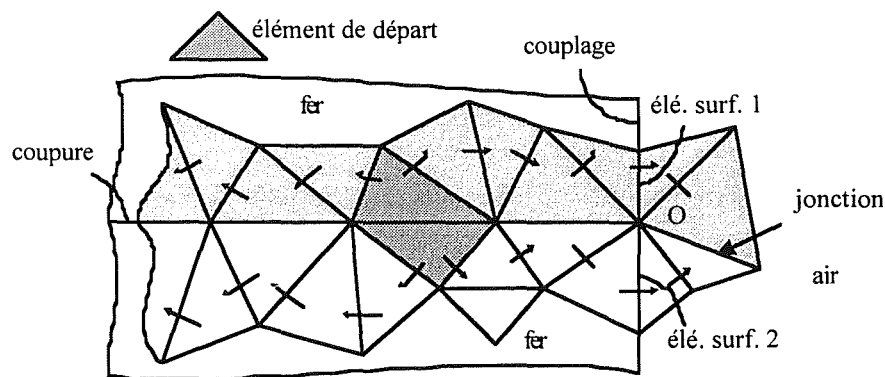


Figure III.7. Recherche par voisinage dont la facette de jonction se trouve dans l'air

En conclusion, pour obtenir un maillage correct, la redistribution des noeuds dédoublés doit s'effectuer de telle sorte que les facettes de jonction soient situées dans l'air.

### III.3.1.3. Création automatique de la coupure [Leonard-93]

La création de coupures n'est pas évidente surtout lorsque la région multiplément connexe est assez compliquée. Leonard a proposé une méthode automatique pour les créer [Leonard-93].

Imaginons les éléments volumiques de la région multiplément connexe (matériau magnétique) comme des bulles de savon qui reposent sur le reste du domaine (air). Le principe consiste à faire dégonfler ces bulles pour déplacer la limite de la région multiplément connexe jusqu'à la surface de coupure. Mathématiquement, cette démarche se traduit comme suit.

Nous commençons d'abord par quelques définitions. On s'appelle  $I$  l'ensemble des facettes internes de la région  $\Omega$  multiplément connexe et  $B$  l'ensemble des facettes de cette région qui sont à la limite du domaine. Dans la phase d'initialisation, marquons tous les éléments volumiques de  $\Omega$  comme "non visités".

On cherche une facette de  $B$  qui est la facette d'un élément "non visité". On perce cette facette. L'élément est marqué comme "visité" et la facette en question et les facettes "flottantes" de  $B$ , ayant une arête qui appartient à une seule facette, sont enlevées de  $B$ . Pour toutes les autres facettes de cet élément, si la facette appartient à  $I$  alors on ajoute cette facette à  $B$  et l'enlève de  $I$ . La procédure itérative est répétée jusqu'à ce que tous les éléments de  $\Omega$  soient "visités". L'ensemble final de  $B$  définit la surface de coupure cherchée.

#### Illustration de la démarche

La démarche de la création de coupure est illustrée sur la figure III.8, dans laquelle une ligne pointillée représente un élément de  $I$ , une ligne continue représente un élément de  $B$ , la partie blanche représente la région multiplément connexe  $\Omega$ .

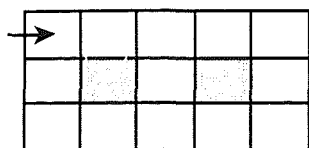


Figure III.8a. Percement d'une facette de B

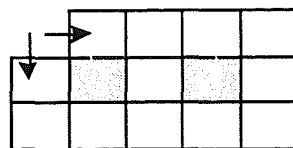


Figure III.8b. Mise à jour de B, I et percement de 2 autres facettes de B

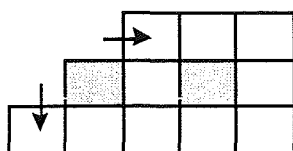


Figure III.8c. Mise à jour de B, I et percement de 2 autres facettes de B

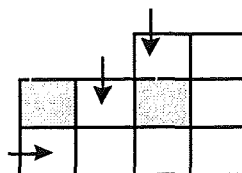


Figure III.8d. Mise à jour de B, I et percement de 3 autres facettes de B

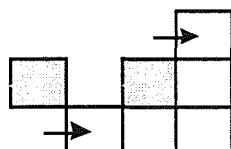


Figure III.8e. Mise à jour de B, I et percement de 2 autres facettes de B

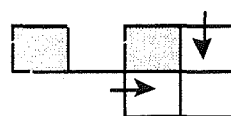


Figure III.8f. Mise à jour de B, I et percement de 2 autres facettes de B

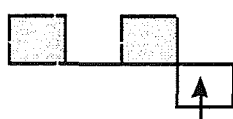


Figure III.8g. Mise à jour de B, I et percement d'une autre facette de B

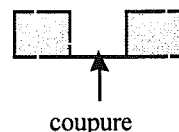


Figure III.8h. Mise à jour de B et surface de coupure

### III.3.2. Conditions de coupure [Luong-96]

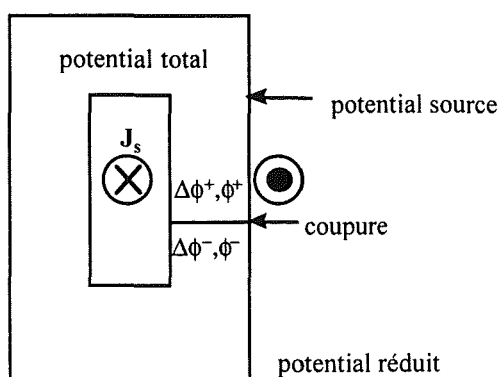


Figure III.9. Géométrie de la région multiplement connexe

Considérons la géométrie de la région perméable multiplement connexe décrite à la figure III.9. En théorie, les sauts de potentiel source  $\Delta\phi$  et de potentiel total  $\phi$  sur la coupure doivent être exactement égaux au courant total  $I$  lié à cette coupure.

$$\Delta\phi^+ - \Delta\phi^- = -I \quad \text{sur la coupure} \quad (\text{III.5})$$

$$\phi^+ - \phi^- = I \quad \text{sur la coupure} \quad (\text{III.6})$$

dans lesquelles  $\phi^+$  et  $\phi^-$  sont les potentiels totaux,  $\Delta\phi^+$  et  $\Delta\phi^-$  sont les potentiels sources sur les côtés des éléments coques de la coupure.

Dans la pratique, les utilisateurs veulent gérer simplement ces conditions de couplage. La présence du courant dans les formules (III.5) et (III.6) exige cependant certaines interventions supplémentaires sur la base de données pour prendre en compte la dépendance avec les courants totaux, ce qui n'est pas toujours évident dans un problème contenant plusieurs coupures. Nous allons développer alors des conditions équivalentes dans lesquelles le courant total est implicite. Remarquons que la distribution de  $\Delta\phi$  de part et d'autre de la coupure donne automatiquement la valeur du courant total qui est en effet le saut de potentiel source  $\Delta\phi$ . Donc, les nouvelles formes de (III.5) et (III.6), que l'on appelle désormais par convention conditions de type "flottante coque" et "translation coque" respectivement, peuvent se réécrire sous la forme

$$\Delta\phi^+ - \Delta\phi^- = \text{constante} \quad \text{sur la coupure} \quad (\text{III.7})$$

$$\phi^+ - \phi^- = -\Delta\phi^+ + \Delta\phi^- \quad \text{sur la coupure} \quad (\text{III.8})$$

#### Exemple d'illustration

Pour illustrer la génération des conditions aux limites attachées aux coupures, nous présentons un exemple simple dont une partie est montrée à la figure III.10, dans laquelle A est un noeud non dédoublé dans l'air, B est un noeud dédoublé sur l'interface de couplage et C est aussi un noeud dédoublé qui se trouve entièrement dans le matériau magnétique.

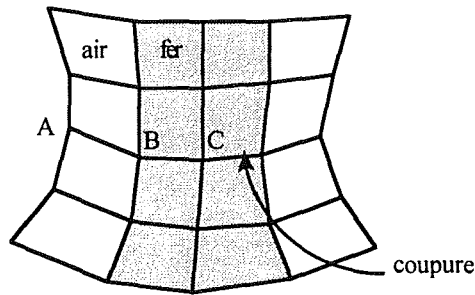


Figure III.10. Illustration des conditions aux limites concernant la coupure

Supposons que  $\Delta\phi^+$  et  $\Delta\phi^-$  sont déjà déterminés. Les conditions sont les suivantes

$$\phi_r^+(A) = \phi_r^-(A) \quad (\text{III.8})$$

$$\phi_r^+(B) = \phi_r^-(B) \quad (\text{III.9})$$

$$\phi^+(B) = \phi^-(B) - \Delta\phi^+(B) + \Delta\phi^-(B) \quad (\text{III.10})$$

$$\phi^+(C) = \phi^-(C) - \Delta\phi^+(C) + \Delta\phi^-(C) \quad (\text{III.11})$$

où (III.8) et (III.9) assurent la continuité de  $\phi_r$  dans l'air, (III.10) et (III.11) sont des conditions de type "translation coque" de  $\phi$ .



### III.4. Démarche à suivre

Cette section présente la démarche à suivre dans le cas général ainsi que dans le cas particulier où la coupure se trouve sur le plan de symétrie à champ normal.

#### III.4.1. Cas général

Il s'agit d'une résolution en deux temps comme présentée précédemment dans le chapitre I. La nouveauté à remarquer dans cette démarche concerne la modification de domaine à calculer en  $\Delta\phi$  et l'utilisation des conditions de type "flottante coque" et "translation coque" présentés à la section III.3.2. La figure III.11 montre le problème type dans ce cas.

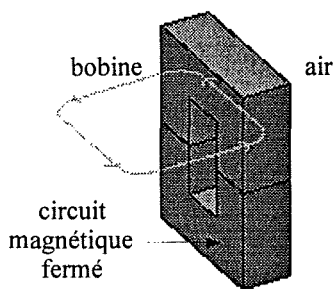


Figure III.11. Problème type en cas général

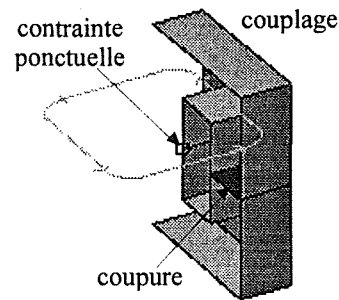


Figure III.12. Couplage, coupure et contrainte ponctuelle en cas général

Dans un premier temps, le calcul de  $\Delta\phi$  est effectué non seulement sur l'interface de couplage mais aussi sur la coupure (figure III.12). Les conditions nécessaires sont

- condition ponctuelle Dirichlet sur  $\Delta\phi$  en un point quelconque du couplage (cf. chapitre I)
- condition de type "flottante coque" pour  $\Delta\phi$  sur la coupure (cf. III.3.2).

Dans un deuxième temps, les calculs de  $\phi$  et  $\phi_r$  sont effectués dans les régions perméables et dans l'air, respectivement. Les conditions sont les suivantes:

- condition ponctuelle Dirichlet sur  $\phi_r$  en un point quelconque dans l'air (cf. chapitre I)
- condition de type "couplage réduit-total" sur l'interface de couplage (cf. chapitre I)
- condition de type "translation coque" pour  $\phi$  sur la coupure (cf. III.3.2)

#### III.4.2. Cas particulier

Dans les cas où la coupure se trouve exactement sur le plan de symétrie à champ normal, cas fréquemment rencontrés dans la pratique, la démarche devient très simple. Le dédoublement des noeuds de la coupure est implicite car seul la moitié de ces noeuds appartient au domaine d'étude. Le maillage traditionnel est suffisant. Il n'y a aucune modification au niveau de la programmation et la seule différence réside dans les types de conditions aux limites à imposer lors de la résolution. Le problème type est illustré à la figure III.13.

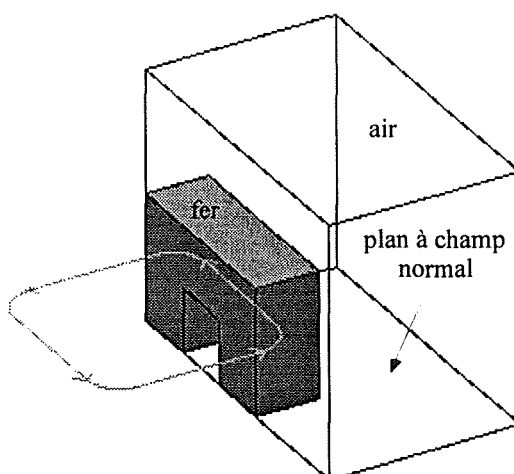
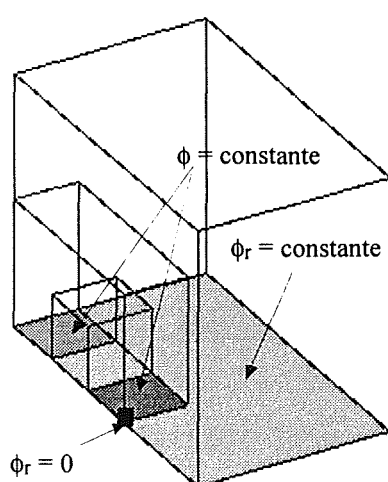
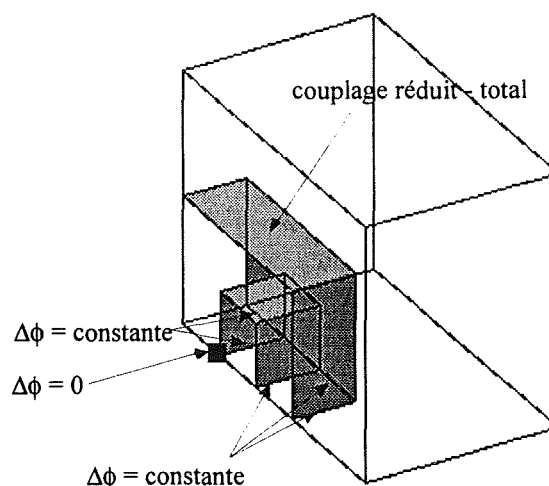


Figure III.13. Problème type de la démarche dans le cas particulier

Figure III.14. Conditions flottantes et contrainte ponctuelle de  $\phi_r$ Figure III.15. Condition de couplage, conditions linéiques de  $\Delta\phi$  et contrainte ponctuelle de  $\Delta\phi$ 

Dans un premier temps, le calcul de  $\Delta\phi$  est effectué sur l'interface de couplage qui est également l'interface des régions perméables. Les conditions nécessaires sont

- condition ponctuelle Dirichlet sur  $\Delta\phi$  en un point quelconque du couplage (cf. chapitre I)
- conditions flottantes linéiques sur  $\Delta\phi$  sur le plan à champ normal (cf. chapitre I)

Dans un deuxième temps, les calculs de  $\phi$  et  $\phi_r$  sont effectués dans les régions perméables et dans l'air. Les conditions sont les suivantes:

- condition ponctuelle Dirichlet sur  $\phi_r$  en un point quelconque de l'air (cf. chapitre I)
- condition de type "couplage réduit-total" sur l'interface de couplage (cf. chapitre I)

- conditions flottantes sur  $\phi$  et  $\phi_r$  sur le plan à champ normal (cf. chapitre I)

Les figures III.14 et III.15 montrent les contraintes utilisées dans cette démarche.

Remarquons que cette démarche ne fonctionne que si les outils de génération robuste des conditions aux limites, présentés au chapitre II, sont utilisés car il y a beaucoup de conditions qui se couplent entre elles dans ce modèle.

### III.5. Validation

La méthode développée est validée dans un cas semi-analytique et dans un cas réel d'un moteur Lavet de montre en fonctionnement magnétostatique.

#### III.5.1. Validation semi-analytique

Il s'agit d'un tore ferromagnétique étant une région multiplement connexe. Les rayons des cercles milieu et méridien sont 2m et 1m, respectivement. La perméabilité relative du matériau magnétique linéaire vaut 1000. Le champ magnétique est excité par un courant filaire infiniment long de 1A, éloigné de 0.1m de l'axe z. La géométrie du problème est illustrée aux figures III.16 et III.17. Gyimesi et al ont analysé cette disposition et obtenu alors le champ magnétique total par une solution semi-analytique [Gyimesi-92b].

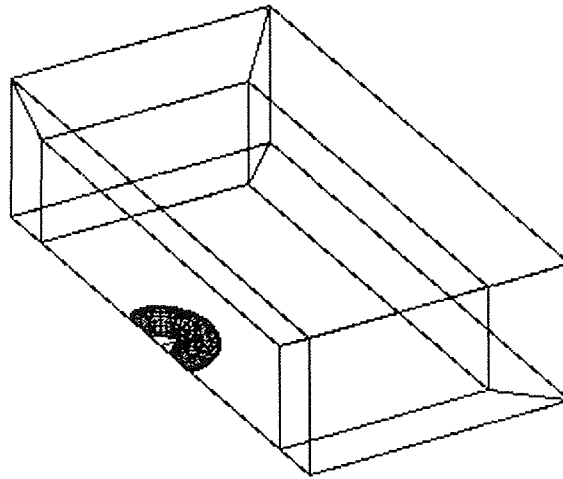


Figure III.16. Vue globale du problème

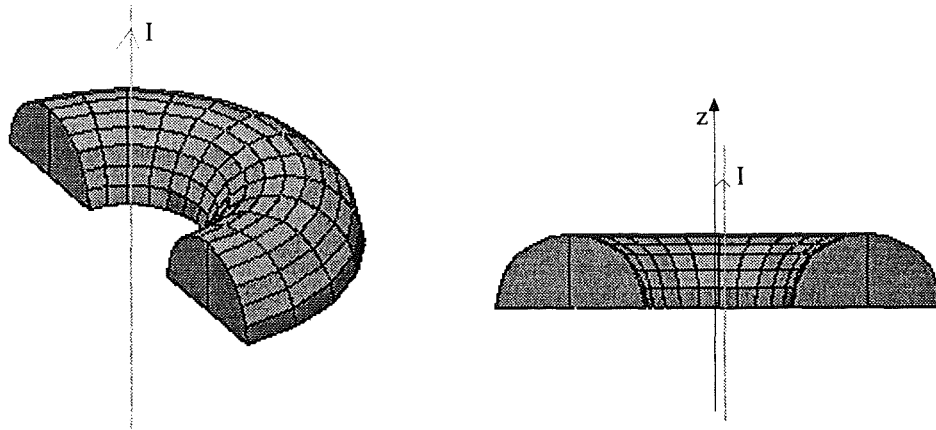


Figure III.17. Géométrie 3D et vue horizontale de la région perméable

Les caractéristiques des résolutions sont donnés par le tableau III.1. Les résultats obtenus par la solution semi-analytique et par les méthodes numériques proposées, avec ou sans coupure, sont résumés dans le tableau III.2 et illustrés à la figure III.20. La comparaison montre une excellente cohérence entre les résultats obtenus par deux méthodes développées et la méthode semi-analytique.

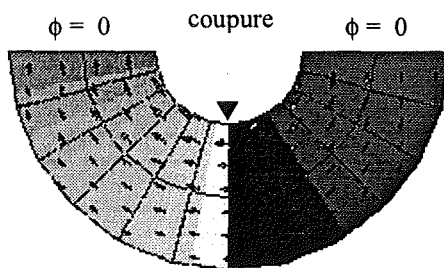
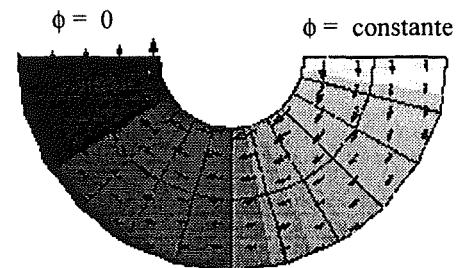
Figure III.18. Distribution de  $\phi$  utilisant une coupure expliciteFigure III.19. Distribution de  $\phi$  utilisant une coupure implicite

Tableau III.1

Caractéristiques des résolutions

Méthode	Sans coupure	Avec coupure
nombre d'éléments	504 + 8251	536 + 8251
nombre d'inconnues	1032 + 10814	1090 + 10814
nombre de coefficients non nuls	6166 + 144638	6997 + 144638
mémoire nécessaire (MB)	0.14 + 2.75	0.15 + 2.75
nombre moyen d'itérations linéaires	29 + 25	29 + 18
temps de calcul (s)	11 + 253	25 + 264
station utilisée	HP712/80	HP712/80

Tableau III.2

Comparaison quantitative entre la méthode semi-analytique et les méthodes numériques

positions (m)		Induction (nT) (semi-analytique) [Gymeisi-92b]		Induction (nT) (numérique sans coupure)		Induction (nT) (numérique avec coupure)	
x	y	B <sub>x</sub>	B <sub>y</sub>	B <sub>x</sub>	B <sub>y</sub>	B <sub>x</sub>	B <sub>y</sub>
10	0	0	20.145	0	19.2	0	19.1
6	0	0	33.632	0	33.1	0	32.9
3.5	0	0	57.419	0	56.8	0	56.4
3	0	0	66.694	0	57.0	0	56.8
1	0	0	200.104	0	203	0	204
.8	0	0	288.049	0	267	0	267
.5	0	0	481.888	0	481	0	481
.3	0	0	982.698	0	982	0	982
-.3	0	0	-516.338	0	-516	0	-517
-.5	0	0	-349.783	0	-349	0	-350
-.8	0	0	-252.257	0	-237	0	-238
-1	0	0	-199.907	0	-195	0	-197
-3	0	0	-66.641	0	-57.0	0	-57.4
-3.5	0	0	-56.879	0	-56.0	0	-56.4
-6	0	0	-33.044	0	-32.1	0	-32.4
-10	0	0	-19.857	0	-18.7	0	-18.8
0	.5	-385.443	-95.536	-385	-95.7	-385	-96.1
0	.8	-263.334	-56.819	-247	-53.9	-247	-54.4
0	1	-199.995	-48.000	-200	-47.8	-200	-49.7
0	3	-66.666	2.370	-63.8	3.03	-63.8	2.84
0	3.5	-57.137	1.214	-56.8	1.35	-56.8	1.13
0	6	-33.329	-.022	-32.6	-.029	-32.6	-.0284
0	10	-19.999	-.087	-19.0	-.024	-19.0	-.0526
-2.5	0	0	-79969	0	-79600	0	-80200
-2	0	0	-99961	-502	-99600	-502	-10000
-1.5	0	0	-133279	0	-134000	0	-135000
1.5	0	0	133392	0	135000	0	134000
2	0	0	100041	0	100000	0	99700
2.5	0	0	80032	0	79700	0	79400

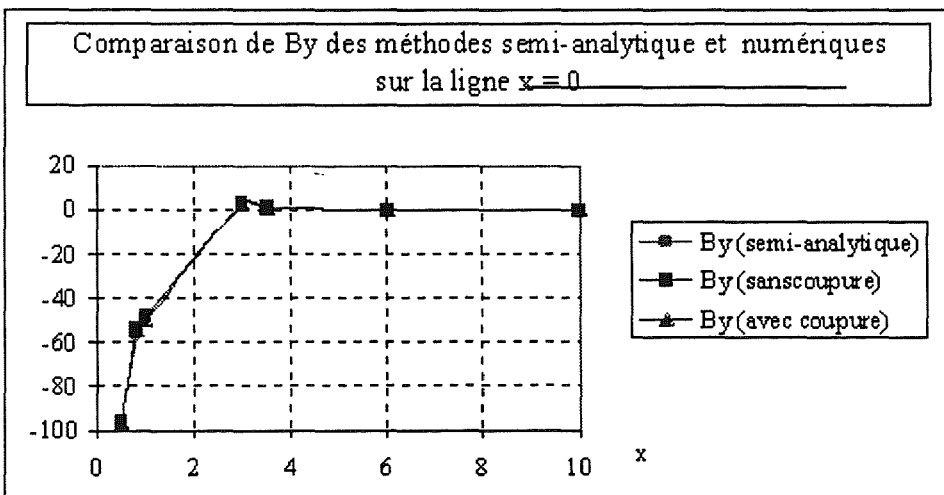
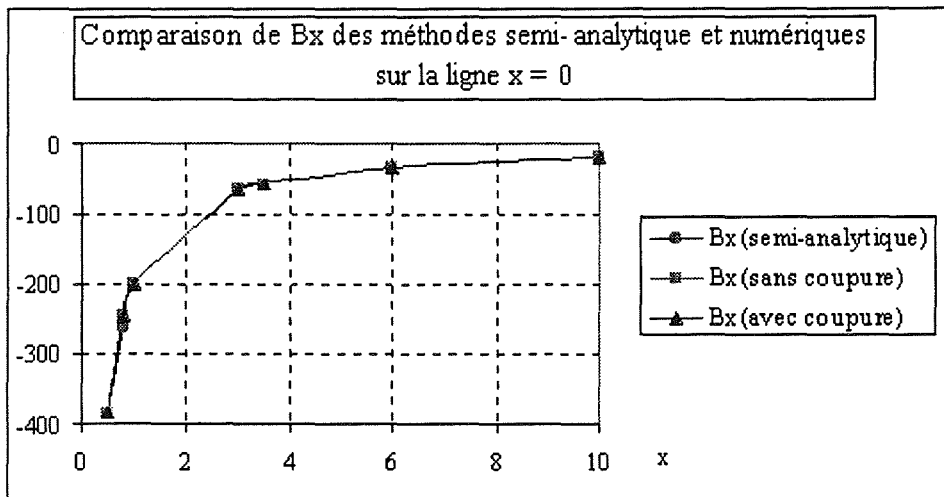
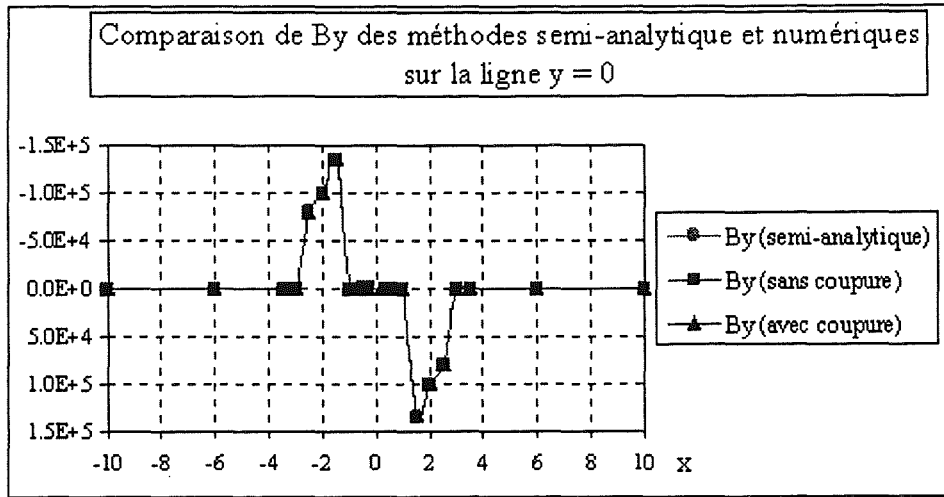


Figure III.20. Comparaison quantitative entre la méthode semi-analytique et les méthodes proposées

### III.5.2. Validation sur un dispositif industriel: le moteur Lavet [Meunier-96] [Taghezout-94]

Le moteur Lavet est constitué d'un rotor en aimant bipolaire, d'un stator à faible coercivité et d'une bobine d'alimentation. Il s'agit d'un moteur utilisé dans les montres. Le matériau magnétique du stator est non linéaire et cette propriété joue un rôle très important dans le fonctionnement du moteur.

Dans une telle étude, un code tridimensionnel est nécessaire car un code bidimensionnel ne pourrait pas prendre en compte de l'épaisseur faible du moteur. La modélisation tridimensionnelle permet également de déterminer les grandeurs physiques aux points critiques autour du rotor et de l'isthme.

La géométrie de ce moteur est donnée dans la figure III.21. La distribution du potentiel scalaire source  $\Delta\phi$  à l'interface de couplage montrée sur la figure III.22 possède un saut de potentiel de part et d'autre de la coupure. La figure III.23 illustre la saturation du stator et la figure III.24 fourni la distribution du potentiel total  $\phi$ . Les caractéristiques de la résolution sont donnés dans le tableau III.3.

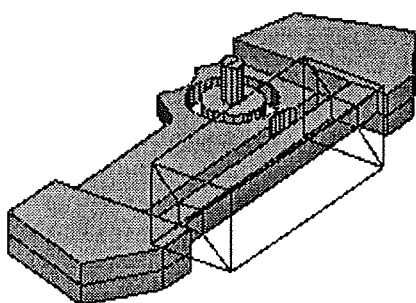


Figure III.21. Géométrie du moteur Lavet

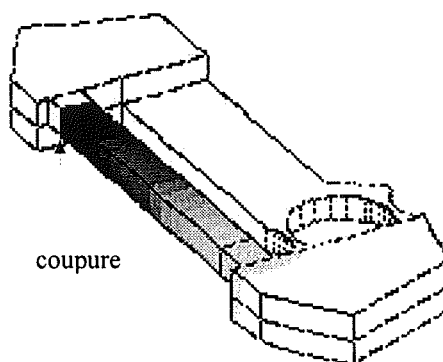


Figure III.22. Distribution de  $\Delta\phi$  à l'interface de couplage

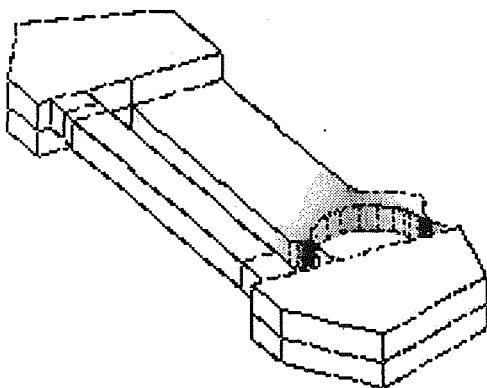


Figure III.23. Saturation du stator

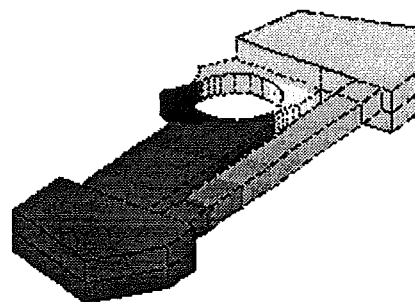


Figure III.24. Distribution du potentiel totale

Tableau III.3  
Caractéristiques de la résolution

nombre d'éléments	2408 + 16513
nombre d'inconnues	4813 + 21649
nombre de coefficients non nuls	35874 + 318670
place mémoire (MB)	0,76 + 5,97
nombre d'itérations non linéaires	1 + 74
nombre moyen d'itérations linéaires	85 + 120
coefficient de relaxation	0,1
station	HP712/80
temps total de CPU (s)	81 + 17142

### III.6. Conclusions

Ce chapitre a proposé une démarche solutionnant le problème de connexité par introduction d'une coupure tout en conservant une bonne précision dans les régions perméables. Nous avons utilisé le potentiel total dans le circuit magnétique fermé en autorisant la discontinuité de ce potentiel à travers une surface de coupure.

Nous avons mis en oeuvre la coupure limitée à la région multiplement connexe et nous avons mis en évidence des erreurs possibles de maillage issues de la mauvaise redistribution des noeuds dédoublés des éléments coques. La création automatique de la coupure a été aussi présentée, ce qui permet de gérer simplement les coupures.

Les conditions concernant les coupures ont été également présentées, elles ont été formulées sous forme implicite pour le courant en raison d'une plus grande facilité d'emploi.

Pour la résolution de  $\Delta\phi$ ,  $\phi$  et  $\phi_r$ , la marche à suivre a été également proposée dans le cas général ainsi que dans le cas particulier où la coupure correspond à un plan de symétrie à champ normal. La méthode développée est validée quantitativement sur un cas semi-analytique et aussi dans un cas réel d'un moteur de montre de type Lavet.



## Références

- [Albanese-90] R. Albanese et G. Rubinacci, "Magnetostatic Field Computation in terms of Two Component Vector Potentials", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, pp. 515-532, 1990.
- [Golias-94] N.A. Golias et T.D. Tsiboukis, "Magnetostatic with Edge Elements: a Numerical Investigation in the Choice of the Tree", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 2877-2880, 1994.
- [Golovanov-97] C. Golovanov, Y. Maréchal et G. Meunier, "Formulation Magnétostatique "Compatible" en Potentiel Vecteur, basée sur les Eléments d'Arête", *soumis à Physique III*, Paris, 1997.
- [Guérin-94] C. Guérin, "Détermination des Pertes par Courants de Foucault dans les Cuves de Transformateurs. Modélisation de Régions Minces et prise en compte de la Saturation des Matériaux Magnétiques en Régime Harmonique", *Thèse de l'INPG*, 1994.
- [Gyimesi-92] M. Gyimesi et J.D. Lavers, "Generalized Potential Formulation for 3-D Magnetostatic Problems", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1924-1929, 1992.
- [Gyimesi-92b] M. Gyimesi et D. Lavers, "Magnetic Field around an Iron Torus", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. , 1992.
- [Gyimesi-93] M. Gyimesi, J.D. Lavers, T. Pawlak et D. Ostergaard, "Application of the General Potential Formulation", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1345-1347, 1993.
- [Kotiuga-87] P.R. Kotiuga, "On Making Cuts for Magnetic Scalar Potentials in Multiply Connected Regions", *J. of Applied Physic*, pp. 3916-3918, 1987
- [Leonard-93] P.J. Leonard, H.C. Lai, R.J. Hill-Cottingham et D. Rodger, "Automatic Implementation of Cuts in Multiply Connected Magnetic Scalar Regions for 3D Eddy Current Models", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1369-1371, 1993.
- [Luong-96] H.T. Luong, Y. Maréchal, P. Labie, C. Guérin and G. Meunier, "Formulation of Magnetostatic Problems in terms of Source, Reduced and Total Scalar Potentials", *Proc. Electrical and Magnetic Fields*, Liège (Belgium), 1996, pp 321-326
- [Maréchal-91] Y. Maréchal, "Modélisation des Phénomènes Magnétostatiques avec terme de Transport: Application aux Ralentisseurs Electromagnétiques", *Thèse de l'INPG*, 1991.
- [Meunier-96] G. Meunier et X. Brunotte, "Finite Element Method in Electromagnetism for Industrial Design", *Proc. Electrical and Magnetic Fields*, Liège (Belgium), pp. 125-134, 1996.
- [Ren-96] Z. Ren, "Auto-gauging of Vector Potential by Iterative Solver - Numerical Evidence", *Proc. Electrical and Magnetic Fields*, Liège (Belgium), pp. 119-124, 1996.
- [Rodger-89] D. Rodger, H.C. Lai et P.J. Leonard, "Coupled Elements for Problems involving

Movement", *Compumag Tokyo*, 1989.

[Taghezout-94] D. Taghezout, M. Vilcot, X. Brunotte, "2D and 3D Finite Analysis of Watch Stepping Motor", *digest of the conference Actuator 94*, pp. 429-434, *Brenen*.

[Vérité-87] J.C. Vérité, "Calculation of Multivalued Potentials in Exterior Regions", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1881-1887, 1987.

[Webb-89] J.P. Webb et B. Forghani, "A Single Scalar Potential Method for 3D Magnetostatics using Edge Elements", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 4126-4128, 1989.



PARTIE B

**PROBLEME MAGNETODYNAMIQUE**



## **Partie B. Problème magnétodynamique**

Le calcul tridimensionnel des courants induits a fait l'objet de nombreuses recherches depuis plusieurs décennies. La raison réside dans l'exigence industrielle d'une modélisation précise des machines électriques et est liée aux progrès de la technologie informatique, qui rend réalisable le traitement de problèmes tridimensionnels de plus en plus conséquents.

La modélisation du problème magnétodynamique reste pourtant encore coûteuse à manipuler car l'existence des courants induits dans les conducteurs rend impossible la description scalaire des champs magnétiques. Une formulation économique du problème magnétodynamique demeure alors une nécessité incontestable.

Cette partie a pour but de proposer des formulations magnétodynamiques aux problèmes en trois dimensions alimentés éventuellement par sources d'alimentation très diversifiées. Elle dispose des trois chapitres.

Le chapitre IV donne une vue globale sur l'ensemble des formulations existantes qui cherchent à modéliser les problèmes magnétodynamiques. Le chapitre V traitera le problème magnétodynamique à courant total imposé alors que le chapitre VI abordera les problèmes dans lesquels la source de tension est connue.



CHAPITRE IV

**PRESENTATION DES FORMULATIONS  
EXISTANTES**





## Chapitre IV. Présentation des formulations existantes

### IV.1. Introduction

L'évaluation qualitative des formulations pour la résolution du problème magnétodynamique a suscité de nombreuses études approfondies. Il semble qu'une formulation, qui combine à la fois les exigences de précision, d'économie et de simplicité d'utilisation, n'existe pas. Cependant, chaque formulation, ayant ses propres avantages et inconvénients, est susceptible d'offrir une solution adaptée à une classe bien déterminée de problèmes.

La formulation que nous essayons de dégager est celle qui permet de modéliser le problème magnétodynamique avec économie et précision. Comme la plupart des applications industrielles électromagnétiques sont alimentées par un circuit électrique d'alimentation, la prise en compte de la source d'alimentation dans le cadre de la formulation recherchée doit être étudiée avec soin.

Dans l'ensemble, il y a deux formulations principales, l'une est basée sur le potentiel vecteur magnétique et l'autre sur le potentiel vecteur électrique.

### IV.2. Formulations basées sur le potentiel vecteur magnétique

A partir des équations de Maxwell

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{IV.1})$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

on peut calculer l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  à l'aide des potentiels vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  et scalaire électrique  $V$  comme suivent

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (\text{IV.3})$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} V \quad (\text{IV.4})$$

La formulation en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  facilite la prise en compte de la source de tension, ce qui se traduit tout simplement par une condition de type Dirichlet de  $V$  aux bornes du conducteur. La prise en compte de la source de courant dans le conducteur massif n'est cependant pas directement traitable, et une résolution simultanée des équations de champ et de circuit électrique doit être effectuée [Meunier-86].

#### IV.2.1. Formulations à tension imposée

Utilisant la formulation en  $\mathbf{A}$ , la densité de courant  $\mathbf{J}$  et la tension  $U$  s'écrivent

$$\mathbf{J} = -\sigma(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} V) \quad \text{dans le conducteur massif} \quad (\text{IV.5})$$

$$U = V_1 - V_2 \quad \text{aux bornes du conducteur} \quad (\text{IV.6})$$

dans lesquelles  $\sigma$  est la conductivité,  $V_1$  et  $V_2$  sont les valeurs de  $V$  aux bornes du conducteur.

Basées sur ce principe, il y a beaucoup de formulations différentes, qui se distinguent entre elles

par la façon de calculer le champ magnétique dans la région non conductrice.

#### IV.2.1.1. Formulation AV-A

La formulation AV-A est la formulation la plus robuste [Carpenter-77]. Les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $V$  sont utilisés ensemble dans les conducteurs et le potentiel  $\mathbf{A}$  seul est utilisé dans le reste du domaine. Les équations de cette formulation sont données par

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) = -\sigma(\partial \mathbf{A} / \partial t + \text{grad} V) \quad \text{dans le conducteur massif} \quad (\text{IV.7})$$

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad \text{dans le conducteur bobiné} \quad (\text{IV.8})$$

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad \text{dans le reste} \quad (\text{IV.9})$$

Bien qu'elle soit très puissante, la formulation exige une jauge pour assurer l'unicité de la solution. Par ailleurs, le potentiel vecteur magnétique doit être calculé dans tout le domaine d'étude, ce qui nécessite évidemment un grand effort de calcul.

#### IV.2.1.2. Formulation AV- $\phi$ - $\phi_r$

En vue d'améliorer l'aspect économique de la formulation précédente, on souhaite remplacer le potentiel vecteur magnétique par le potentiel scalaire magnétique là où la physique le permet. La formulation AV- $\phi$ - $\phi_r$  cherche à remplacer l'utilisation de  $\mathbf{A}$  par celle des potentiels scalaires magnétiques [Biro-89]. Les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $V$  sont toujours utilisés dans les conducteurs, alors que le potentiel scalaire total  $\phi$  est utilisé dans les régions perméables et le potentiel scalaire réduit  $\phi_r$  est utilisé dans l'air, englobant les bobines alimentées. Les équations de cette formulation sont

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) = -\sigma(\partial \mathbf{A} / \partial t + \text{grad} V) \quad \text{dans le conducteur massif}$$

$$\text{div } \mu(\mathbf{H}_j - \text{grad } \phi_r) = 0 \quad \text{dans l'air} \quad (\text{IV.10})$$

$$\text{div } \mu(\text{grad } \phi) = 0 \quad \text{dans les régions perméables} \quad (\text{IV.11})$$

Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  est exprimé par

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} \quad \text{dans le conducteur massif}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j - \text{grad } \phi_r \quad \text{dans l'air} \quad (\text{IV.12})$$

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \phi \quad \text{dans les régions perméables} \quad (\text{IV.13})$$

Cette formulation permet de réduire considérablement le nombre d'inconnues à résoudre. Par contre, l'utilisateur peut se heurter au problème d'oscillation de la solution [Bryant-90] et au problème de connexité (cf. chapitre III).

Lorsque la perméabilité de la région utilisant le potentiel vecteur magnétique est très grande par rapport à celle de la région utilisant le potentiel scalaire, une oscillation de la solution apparaît à l'interface des deux régions [Bryant-90]. La raison réside dans le fait que sur l'interface de la région perméable, la composante tangentielle du champ magnétique tend vers zéro, il en résulte un couplage très faible et imprécis entre le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire magnétique tenant compte que la continuité de la composante normale de l'induction n'est assurée qu'au sens faible [Maréchal-92]. Pour éviter cette oscillation, il existe deux solutions.

La première consiste à englober les conducteurs par une petite boîte d'air décrite en potentiel vecteur magnétique [Bryant-90], ce qui permet d'annuler la différence de perméabilité sur le couplage. Les résultats sont satisfaisants, mais une telle technique semble difficile à systématiser dans les codes conventionnels, et requiert une grande habileté de la part de l'utilisateur.

La deuxième solution procède par une procédure en deux temps [Maréchal-92]: dans un premier temps le champ est calculé en considérant la perméabilité de la région perméable comme infinie puis dans un deuxième temps la perméabilité réelle est restaurée en ignorant les sources de courant. Le champ calculé est alors « réduit » par rapport à la solution précédente.

Il faut remarquer tout de même que la formulation  $AV-\phi-\phi_r$  n'est pas capable de traiter le problème de connexité dû à l'utilisation du potentiel scalaire total sans introduction d'éléments coques à saut de potentiel (cf. chapitre III).

#### IV.2.1.3. Formulation $AV-A-\phi-\phi_r$

Pour pallier au problème de connexité, on peut utiliser le potentiel vecteur magnétique à la place du potentiel scalaire magnétique dans le trou du conducteur [Biro-89].

Cette formulation est robuste, elle permet de traiter une large gamme d'applications. Elle reste pourtant assez coûteuse, surtout lorsque le trou est maillé avec finesse. Le problème d'oscillation éventuelle de la solution sur l'interface est toujours à traiter dû à la présence du couplage entre  $A$  et  $\phi$ .

#### IV.2.1.4. Formulation $A^*-\phi-\phi_r$

La formulation la plus économique utilisant le potentiel vecteur magnétique est la formulation en potentiel vecteur magnétique modifié  $A^*$  [Emson-83]. Elle permet de minimiser les degrés de liberté dans le conducteur: seul le potentiel vecteur magnétique "modifié" est utilisé. La participation du potentiel scalaire électrique  $V$  est implicitement introduite dans l'expression de  $A^*$

$$A^* = A + \int \text{grad} V \, dt \quad \text{dans le conducteur} \quad (\text{IV.14})$$

L'équation différentielle du champ sera

$$\text{rot}(\nu \text{rot} A^*) = -\sigma \partial A^* / \partial t \quad (\text{IV.15})$$

Malheureusement, dans le cadre de l'approximation par des éléments finis nodaux, cette formulation ne peut pas subir de discontinuité de la conductivité et pose problème pour le traitement des régions multiplement connexes. D'autre part, une source de tension ne peut pas être pris en compte à cause de l'absence du potentiel  $V$ . Par conséquent une telle formulation n'est pas directement adaptée au problème alimenté par une source de tension.

### IV.2.2. Formulation à courant total imposé

Contrairement aux formulations à tension imposée, la formulation basée sur le potentiel vecteur magnétique ne peut pas modéliser directement les problèmes magnétodynamiques à courant total imposé. Pour traiter ce genre de problèmes, Meunier et Coulomb ont proposé une méthode qui

consiste à résoudre simultanément les équations de champ et de circuit électrique [Meunier-86].

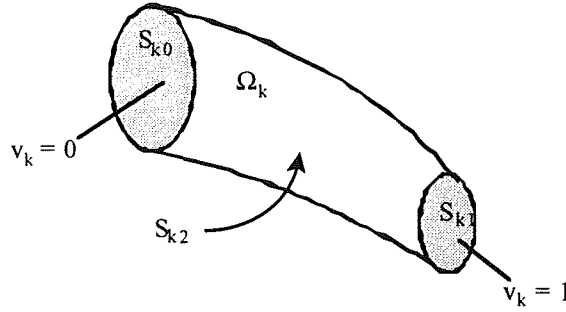


Figure IV.1. Conducteur k et ses contraintes

Soient K conducteurs  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$  dont  $I_k$  est le courant parcourant le conducteur k et  $U_k$  est la tension imposée sur les bornes  $S_{k0}, S_{k1}$  comme illustrés à la figure IV.1.

En premier temps, le potentiel électrique « unitaire »  $v_k$  est calculé en régime électrocinétique par

$$\text{div}(\sigma \text{grad } v_k) = 0 \quad \text{dans } \Omega_k \quad (\text{IV.16})$$

avec les conditions aux limites

$$v_k = 0 \quad \text{sur } S_{k0} \quad (\text{IV.17})$$

$$v_k = 1 \quad \text{sur } S_{k1} \quad (\text{IV.18})$$

$$\partial v_k / \partial n = 0 \quad \text{sur } S_{k2} \quad (\text{IV.19})$$

Nous avons alors trois relations suivantes [Meunier-86]

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) + \sigma \partial \mathbf{A} / \partial t + \sigma \text{grad} \phi + U_k \sigma \text{grad} v_k = 0 \quad (\text{IV.20})$$

$$\text{div}(\sigma \partial \mathbf{A} / \partial t) + \text{div}(\sigma \text{grad} \phi) = 0 \quad (\text{IV.21})$$

$$\int_{\Omega_k} \sigma \partial \mathbf{A} / \partial t \text{grad} v_k d\Omega + U_k \int_{\Omega_k} \sigma (\text{grad} v_k)^2 d\Omega = I_k \quad (\text{IV.22})$$

L'équation matricielle se présente en cas harmonique sous la forme

$$\begin{bmatrix} S_{ij} & T_{ij} & G_{ik} \\ K_{ij} & L_{ij} & 0 \\ F_{kj} & 0 & H_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \phi \\ U_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_k \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

$$\text{où} \quad S_{ij} = \int_{\Omega_k} \nu \text{rot} \mathbf{W}_i^T \text{rot} \mathbf{W}_j d\Omega + \int_{\Omega_k} j\omega \sigma \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_j d\Omega \quad (\text{IV.24})$$

$$T_{ij} = \int_{\Omega_k} \sigma \mathbf{W}_i^T \text{grad} \alpha_j d\Omega \quad (\text{IV.25})$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega_k} j\omega \sigma (\text{grad} \alpha_i)^T \mathbf{W}_j d\Omega \quad (\text{IV.26})$$

$$L_{ij} = \int_{\Omega_k} \sigma (\text{grad } \alpha_i)^T \text{grad } \alpha_j d\Omega \quad (\text{IV.27})$$

$$G_{ik} = \int_{\Omega_k} \sigma \mathbf{W}_i^T \text{grad } v_k d\Omega \quad (\text{IV.28})$$

$$F_{kj} = \int_{\Omega_k} j \omega \sigma (\text{grad } v_k)^T \mathbf{W}_j d\Omega \quad (\text{IV.29})$$

$$H_{kk} = \int_{\Omega_k} \sigma (\text{grad } v_k)^2 d\Omega \quad (\text{IV.30})$$

#### IV.2.3. Résumé

Le potentiel vecteur magnétique fourni un moyen robuste pour modéliser les problèmes magnétodynamiques surtout en présence des sources de tension. En tenant compte de l'aspect économique et de la généralité, la formulation en  $\mathbf{A}V\text{-}\mathbf{A}\text{-}\phi\text{-}\phi_r$  semble d'être la formulation la plus adaptée au problème à tension imposée. Néanmoins, il reste toujours à traiter le problème d'oscillation sur l'interface entre  $\mathbf{A}$  et  $\phi$ , et aussi le coût de calcul lorsque le potentiel vecteur est utilisé dans le trou. En cas d'alimentation par une source de courant, la seule solution est la résolution simultanée des équations de champ et de circuit électrique.

Retenons enfin que, malgré les efforts mentionnés, le coût du calcul en potentiel vecteur magnétique reste toujours important.

### **IV.3. Formulations basées sur le potentiel vecteur électrique**

Un avantage majeur de la formulation en potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$  est que ce vecteur est nul partout hormis les conducteurs, ce qui revient à réduire le coût du calcul. Par ailleurs, une différence par rapport aux formulations basées sur  $\mathbf{A}$  est que la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique se traduit par un couplage entre les potentiels scalaires, parfois naturellement satisfait. Donc un calcul de couplage peut être réalisé avec qualité (cf. chapitre I).

Contrairement aux formulations basées sur  $\mathbf{A}$ , la source de tension ne peut pas être directement introduite, alors que le problème alimenté par une source de courant semble plus facile à traiter, même si certaines modifications doivent être apportées. En cas de source de tension, une résolution simultanée du problème couplé entre équations de champ et équations de circuit électrique sera nécessaire.

#### IV.3.1. Formulations à courant total imposé

La formulation en potentiel vecteur électrique est une formulation économique. Cependant sa forme initiale semble impliquer un courant total nul dans le conducteur massif. Pour représenter le courant total non nul du conducteur, un potentiel  $\mathbf{T}_0$  doit être introduit.

Par la suite, nous allons présenter la formulation  $\mathbf{T}\phi\text{-}\phi$  associée au courant total nul [Preston-82] et la formulation  $\mathbf{T}\mathbf{T}_0\phi\text{-}\mathbf{T}_0\phi$  associée au courant total non nul [Biro-93].

#### IV.3.1.1. Formulation $\mathbf{T}\phi\text{-}\phi$

En utilisant le potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$ , le champ magnétique et la densité de courant  $\mathbf{J}$  dans le conducteur massif  $\Omega_c$  s'expriment

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{IV.31})$$

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \phi \quad \text{dans le reste} \quad (\text{IV.32})$$

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{T} \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{IV.33})$$

Les équations de champ seront

$$\text{rot}(\text{prot}(\mathbf{T})) + \partial(\mu\mathbf{T} - \mu\text{grad}\phi)/\partial t = 0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{IV.34})$$

$$\text{div}(\mu\text{grad}\phi) = 0 \quad \text{dans le reste} \quad (\text{IV.35})$$

Cette formulation nécessite quatre degrés de liberté dans les conducteurs massifs. Pour une bonne convergence de la résolution, un terme de pénalité  $\text{grad}(\text{div}\mathbf{T})$  est introduit et une condition de couplage  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}$  est imposée sur l'interface du conducteur [Biro-93].

Cependant, la condition  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}$  implique également un courant total nul du conducteur

$$I = \int \mathbf{J} d\mathbf{S} = \int \text{rot}\mathbf{T} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{T} d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{IV.36})$$

ce qui signifie malheureusement une restriction du domaine d'applications de cette formulation.

#### IV.3.1.2. Formulation $\mathbf{T}\mathbf{T}_0\phi\text{-}\mathbf{T}_0\phi$

En vue de prendre en compte un courant total imposé non nul  $I$ , Biro et al ont proposé d'introduire dans la formulation classique un potentiel  $\mathbf{T}_0$  [Biro-93], calculé au préalable tel que

$$\int \text{rot}\mathbf{T}_0 d\mathbf{S} = I \quad (\text{IV.37})$$

La condition de couplage  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}$  reste toujours imposée, ce qui favorise une bonne convergence de la résolution en éléments nodaux.

Le champ magnétique et la densité de courant  $\mathbf{J}$  s'écrivent alors

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T} - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{IV.38})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi \quad \text{dans le reste} \quad (\text{IV.39})$$

$$\mathbf{J} = \text{rot } (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0) \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{IV.40})$$

Les équations de champ magnétique seront

$$\text{rot}(\text{prot}(\mathbf{T} + \mathbf{T}_0)) + \partial(\mu\mathbf{T} + \mu\mathbf{T}_0 - \mu\text{grad}\phi)/\partial t = 0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{IV.41})$$

$$\text{div}(\mu\mathbf{T}_0 - \mu\text{grad}\phi) = 0 \quad \text{dans le reste} \quad (\text{IV.42})$$

#### IV.3.2. Formulation à tension imposée

Dans les problèmes magnétodynamiques alimentés par une source de tension contenant des bobines filaires, une résolution simultanée des équations de champ et des équations de circuit électrique a été développée [Dreher-94] [Bouissou-94]. Cette formulation sera présentée dans le chapitre VI qui suit.

A notre connaissance, une formulation en potentiel vecteur électrique, qui permet de traiter les sources de tension dans les conducteurs massifs pouvant être parcourus par des courants induits, n'a pas encore proposé. Dans le chapitre VI, nous développerons une telle formulation en résolvant simultanément les équations de champ et de circuit électrique en cas de bobines filaires ainsi qu'en cas de bobines massives pouvant être le siège des courants induits.

#### IV.3.3. Résumé

La formulation en potentiel vecteur électrique permet de modéliser avec économie et précision le problème magnétodynamique à courant total imposé. En cas de source de tension, il est intéressant également de disposer d'un modèle en potentiel vecteur électrique, car il favorise à la fois l'économie du calcul et la généralité de la démarche.

#### **IV.4. Démarche à développer**

La formulation en potentiel scalaire magnétique et potentiel vecteur électrique semble être très attrayante vu les facteurs économiques et qualitatifs. Pour prendre en compte un courant total non nul, la mise en oeuvre d'une telle formulation nécessite pourtant un calcul de  $\mathbf{T}_0$  qui doit s'adapter non seulement aux bobines filaires mais aussi aux bobines massives pouvant être le siège des courants induits. Ce calcul une fois élaboré, nous permettra de formuler les problèmes magnétostatique ainsi que magnétodynamique. La démarche que nous développerons au chapitre V est destinée à résoudre cette exigence dans le cadre des problèmes à courant total imposé.

En cas d'alimentation par une source de tension, nous proposerons également une démarche analogue toujours basée sur le potentiel vecteur électrique et le potentiel scalaire magnétique. La présence de la tension fait intervenir des difficultés supplémentaires. Le couplage entre équations de champ et de circuit électrique doit être effectué, et en particulier, les relations de circuit doivent être représentables en fonction des grandeurs du champ et des paramètres du circuit pour qu'elles puissent être introduites dans le système global. C'est la démarche que nous adopterons au chapitre VI.



## Références

- [Bouissou-94] *S. Bouissou*, "Comparaison des Formulations en Potentiels, pour la Résolution Numérique en 3D des Equations Magnétiques couplée aux Equations de Circuit Electrique", thèse de l'Université Paris 6, 1994.
- [Biro-89] O. Biro et K. Preis, "On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three Dimensional Eddy Currents", *IEEE Trans. Mag.*, 3145-3159, 1990.
- [Biro-93] O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk et F.R. Richter, "Computation of 3-D Current Driven Skin Effect Problems using a Current Vector Potential", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1325-1328, 1993.
- [Bryant-90] C.F. Bryant, C.R.I. Emson et G.W. Trowbridge, "Solving Transient Eddy Current Problems with Holes", *Proceeding of the European TEAM Workshop*, Oxford, April 1990.
- [Carpenter-77] C.J. Carpenter, "Comparison of Alternative Formulations of 3-dimensional Magnetic Field and Eddy Current Problems at Power Frequencies", *Proc. IEE*, Vol. 124, N°11, pp. 1026-1034, 1977.
- [Dreher-94] *T. Dreher*, "Couplage de la Méthode des Eléments Finis avec une Méthode d'Analyse du Circuit Electrique: Application à la Modélisation des Machines Electriques Tournantes", thèse de l'INPG, 1994.
- [Emson-83] C.R.I. Emson et J. Simkin, "An Optimal Method for 3-D Eddy Currents", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 2450-2452, 1983.
- [Maréchal-92] Y. Maréchal, G. Meunier et H. Ben Harara, "A New 3D  $AV-\phi-\phi_r$  Formulation", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1204-1207, 1992.
- [Meunier-86] G. Meunier et J.L. Coulomb, "Solution of 3D Eddy Currents and Electrical Circuit Combined Problems", *Eddy Current Seminar*, Oxford, Mars 1986.
- [Preston-82] T.W. Preston et A.B.J. Reece, "Solution of 3-Dimensional Eddy Current Problems: the T- $\Omega$  Method", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 486 -491, 1982.

CHAPITRE V

**PROBLEME MAGNETODYNAMIQUE A  
COURANT TOTAL IMPOSEE**



## Chapitre V. Problème magnétodynamique à courant total imposé

### *Situation*

*L'utilisation du potentiel vecteur électrique permet de réduire l'effort de calcul tridimensionnel alors que subsiste encore des limites par rapport au potentiel vecteur magnétique en terme de la connexité topologique et de la présence de bobines très diversifiées.*

### *Question*

*En tenant compte de la source de courant, comment conserver une modélisation magnétodynamique utilisant le potentiel vecteur électrique ?*

### *Démarche directrice*

*La prise en compte de la source de courant se réalise en utilisant le potentiel auxiliaire  $T_0$ . Le problème de connexité est traité en utilisant une coupure à saut de potentiel.*

## V.1. Introduction

La maîtrise des formulations en potentiel vecteur électrique pour modéliser les phénomènes électromagnétiques tridimensionnels constitue un enjeu important vu le coût économique de telles formulations. Actuellement, elles possèdent encore des limites par rapport au potentiel vecteur magnétique dans la prise en compte de la connexité topologique et dans la présence de bobines inductrices très diversifiées (cf. chapitre IV).

La formulation traditionnelle en potentiel vecteur électrique est économique, mais implique à un courant total nul dans la section du conducteur massif. Afin de prendre en compte un courant total non nul dans un conducteur bobiné ou massif en utilisant cette formulation, un potentiel vecteur auxiliaire  $T_0$  peut être introduit.

Le problème de connexité est quant à lui traité en utilisant une surface de coupure et les démarches appropriées aux différents types de bobines sont proposées.

## V.2. Problème type et formulation

Pour prendre en compte le courant total traversant le conducteur massif ou bobiné à un coût de calcul raisonnable, il faut introduire dans la formulation en potentiel vecteur électrique un nouveau potentiel vecteur électrique, que l'on appelle  $T_0$ .

### V.2.1. Problème type

Pour la clarté de l'exposé, un problème type est défini au préalable. Le problème type de la figure V.1 est constitué de manière schématique par l'ensemble des différents domaines physiques susceptibles d'être rencontrés dans un dispositif réel.

Soit  $\Omega$  le domaine d'étude complet. Il est suffisant de distinguer trois types de régions: la région

conductrice  $\Omega_c$  pouvant être le siège des courants induits, la région  $\Omega_i$  définissant le trou qui bouche  $\Omega_c$  pour former un ensemble de régions simplement connexe et le reste du modèle  $\Omega_r$ . L'ensemble constitué de  $\Omega_i$  et  $\Omega_r$  est alors multiplément connexe. Par ailleurs, le trou  $\Omega_i$  peut comporter des matériaux magnétiques à perméabilité élevée. La région  $\Omega_r$  comprend une boîte d'air prise suffisamment grande pour que ses frontières puissent être considérées comme l'infini au sens du champ magnétique et électrique.

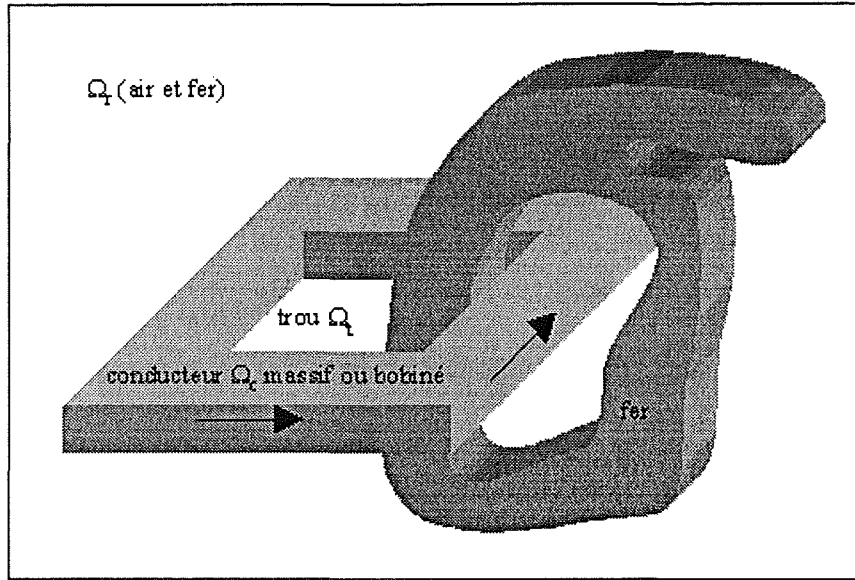


Figure V.1. Problème type du problème à courant total imposé

Un tel problème type peut mettre en cause l'utilisation du potentiel total dans le trou en raison du problème de connexité. La région conductrice  $\Omega_c$  peut être massive ou bobinée.

### V.2.2. Formulation à courant total imposé

La formulation classique en terme du potentiel vecteur électrique n'est pas suffisant pour prendre en compte le courant total non nul (cf. chapitre IV). Pour cela, quelques notations doivent être apportées sur la formulation utilisée.

Soit  $\mathbf{J}_0$  une densité de courant dont l'intégrale vaut  $I$ . En insistant sur la prise en compte de la valeur totale du courant, ce courant peut être modélisé à l'aide d'un potentiel vecteur, que l'on appelle désormais  $\mathbf{T}_0$ , dont le rotationnel représente la distribution locale de la densité de courant  $\mathbf{J}_0$  :

$$\mathbf{J}_0 = \text{rot } \mathbf{T}_0 \quad (\text{V.1})$$

D'un point de vue générale,  $\mathbf{J}_0$  n'est pas nécessairement identique à la densité effective de courant source  $\mathbf{J}_s$ , ce qui revient à procurer une plus grande liberté au calcul de  $\mathbf{T}_0$ .

Il nous reste alors à introduire le potentiel  $\mathbf{T}_0$  dans la formulation en potentiel vecteur électrique. En considérant le problème magnétostatique comme problème magnétodynamique sans courant induit, nous souhaitons présenter en premier la formulation pour le problème

magnétodynamique, la formulation magnétostatique s'en déduit immédiatement.

### V.2.2.1. Cas magnétodynamique

Afin de prendre en compte le courant total imposé dans les conducteurs massifs, Biro et al ont proposé la formulation  $\mathbf{T}$ - $\mathbf{T}_0$ - $\Omega$  [Biro-93b]. Le champ magnétique et la densité de courant  $\mathbf{J}$  s'écrivent par

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T} - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.2})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi \quad \text{dans le reste} \quad (\text{V.3})$$

$$\mathbf{J} = \text{rot } (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0) \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.4})$$

où  $\phi$  est potentiel scalaire total et  $\mathbf{T}$  le potentiel vecteur électrique.

Nous avons également

$$\text{rot } \mathbf{T}_0 = \mathbf{J}_0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.5})$$

$$\text{rot } \mathbf{T}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans le reste} \quad (\text{V.6})$$

Les équations de champ seront

$$\text{rot}(\text{prot}(\mathbf{T} + \mathbf{T}_0)) - \partial(\mu\mathbf{T} + \mu\mathbf{T}_0 - \mu\text{grad}\phi)/\partial t = 0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.7})$$

$$\text{div}(\mu\mathbf{T}_0 - \mu\text{grad}\phi) = 0 \quad \text{dans le reste} \quad (\text{V.8})$$

avec la condition aux limites

$$\mathbf{T} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{à l'interface de } \Omega_c \quad (\text{V.9})$$

qui assure un bon conditionnement de la matrice dans le cadre des calculs en éléments finis nodaux.

### Remarque importante

La relation (V.4) permet de prendre  $\mathbf{J}_0$  différente à  $\mathbf{J}_s$ , d'où une liberté de calcul de  $\mathbf{T}_0$  accrue. La différence entre eux sera justifiée par le potentiel  $\mathbf{T}$ .

### V.2.2.2. Cas magnétostatique

La formulation magnétostatique est déduite de la formulation précédente en annulant tout simplement  $\mathbf{T}$ . Les formules deviennent alors

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi \quad \text{dans tout le domaine} \quad (\text{V.10})$$

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{T}_0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.11})$$

$$\text{div}(\mu\mathbf{T}_0 - \mu\text{grad}\phi) = 0 \quad \text{dans tout le domaine} \quad (\text{V.12})$$

Contrairement au cas précédent, par manque du terme de justification  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{J}_0$  doit être identique à  $\mathbf{J}_s$  pour que la distribution effective de courants soit respectée dans les conducteurs.

### V.3. Calcul de $\mathbf{T}_0$

La mise en oeuvre de la formulation en  $\mathbf{T}_0$  exige un calcul préalable de  $\mathbf{T}_0$ . Il existe de nombreuses méthodes susceptibles de fournir une distribution de  $\mathbf{T}_0$  appropriée. L'état de l'art en matière de calcul de  $\mathbf{T}_0$  est alors exposé dans la section qui suit.

#### V.3.1. Méthodes existantes

Les méthodes de calcul de  $\mathbf{T}_0$  sont nombreuses, pourtant nous pouvons distinguer deux catégories essentielles de méthodes. L'une traite les conducteurs bobinés et l'autre cherche à modéliser les conducteurs massifs.

##### *V.3.1.1. Cas des conducteurs bobinés*

La densité de courant dans les conducteurs bobinés est connue, et de plus, peut être considérée comme uniforme. Vu la taille négligeable de chaque section de conducteur, l'effet de peau est très faible, ce qui revient à omettre les courants induits.

Dans ce cas,  $\mathbf{T}_0$  peut être calculé analytiquement ou numériquement. Parmi les méthodes analytiques,  $\mathbf{T}_0$  peut être considéré comme le champ source  $\mathbf{H}_j$  calculé par la loi de Biot-Savart. Pour certaine forme simplificatrice de la géométrie, une autre méthode consiste à calculer  $\mathbf{T}_0$  par des fonctions analytiques dépendant des données géométriques de la bobine. Utilisant les éléments d'arête, le calcul numérique peut être basé sur un arbre global [Webb-89], ou local [Biro-93] ou sur une fonctionnelle jaugée implicitement [Ren-96] [Golovanov-97].

##### *Eléments d'arête avec arbre [Webb-89]*

Il s'agit d'utiliser les éléments d'arête et de construire un arbre du maillage où la loi d'Ampère est satisfaite localement sur chaque facette (cf. chapitre I). La démarche est très simple, une seule résolution numérique est suffisante. Cependant, on peut s'apercevoir l'influence du choix de l'arbre sur la qualité de la solution. Le calcul préalable de  $\mathbf{T}_0$  par la technique utilisant l'arbre n'est pas homogène au code conventionnel des éléments finis, et en plus le calcul du potentiel vecteur doit être effectué sur tout le domaine d'étude.

##### *Eléments d'arête avec jauge implicite [Ren-96] [Golovanov-97]*

Les éléments d'arête sont également applicables pour calculer numériquement  $\mathbf{T}_0$  (cf. chapitre I). C'est une démarche familière avec la méthode des éléments finis et qui profite de la bonne convergence de la résolution en éléments d'arête par un solveur du type gradient conjugué. Malgré la singularité de la matrice, la méthode est simple et précise. Cependant, un calcul vectoriel dans tout le domaine doit être effectué, ce qui nuit à l'aspect économique de la méthode.

##### *Calcul analytique dans un domaine limité [Nakata-88] [Kladas-92]*

Il s'agit d'une méthode pour laquelle  $\mathbf{T}_0$  est nul dans presque tout le domaine d'étude. Le potentiel  $\mathbf{T}_0$  est calculé analytiquement à partir des données géométriques du conducteur bobiné. La figure V.2 montre quelques définitions géométriques nécessaires. Dans cette approche  $\mathbf{T}_0$  est

une quantité vectorielle satisfaisant les conditions suivantes

- $\mathbf{T}_0$  est limité dans un sous domaine  $\Omega_0$  simplement connexe contenant la bobine  $\Omega_c$  et le trou  $\Omega_t$ ,
- $\text{rot } \mathbf{T}_0 = \mathbf{J}_s$  dans le conducteur et  $\text{rot } \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$  dans le reste.
- $\mathbf{T}_0$  est perpendiculaire à  $\Gamma_0$  qui est la limite de  $\Omega_0$ .

Ces conditions constituent une base minimale permettant de simuler le conducteur bobiné.

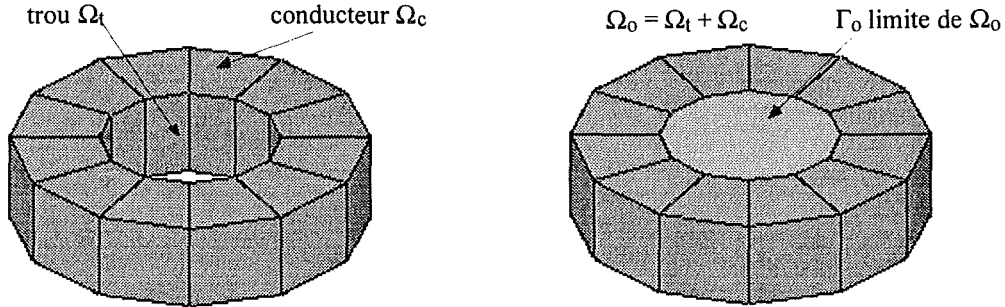


Figure V.2. Définitions géométriques de  $\Omega_0$  et  $\Gamma_0$

Vu que  $\mathbf{T}_0$  n'a pas de sens physique, sa définition est relativement souple, en particulier  $\text{div } \mathbf{T}_0$  peut être non nul et la distribution de  $\mathbf{T}_0$  peut subir une discontinuité. Cette technique permet de modéliser avec économie les bobines planes sans calculer au préalable le champ source par la loi de Biot-Savart. Par définition, une bobine plane est la bobine ayant une hauteur constante comme l'illustre la figure V.3.

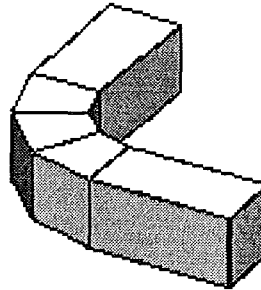


Figure V.3. Bobine plane

Dans un tel cas,  $\mathbf{T}_0$  est unidimensionnel et un calcul scalaire suffira

$$\mathbf{T}_0 = T_0 \mathbf{z} \quad (\text{V.13})$$

Du fait que la densité de courant est perpendiculaire avec  $\mathbf{z}$ , elle s'exprime sous la forme suivante

$$\mathbf{J}_s = J_x \mathbf{x} + J_y \mathbf{y} \quad (\text{V.14})$$

ce qui conduit à des relations



$$\partial T_0 / \partial y = J_x \quad (V.15)$$

$$\partial T_0 / \partial x = -J_y \quad (V.16)$$

Dans les bobines planes à densité de courant uniforme, nous pouvons retrouver facilement la distribution linéaire de  $T_0$  selon les données géométriques de la bobine. L'exemple de la figure V.4 montre un tel cas

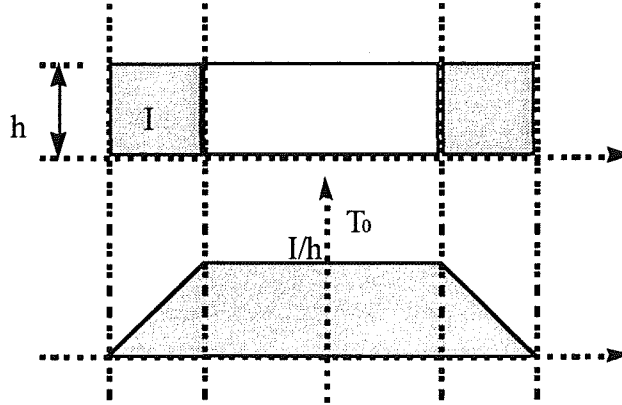


Figure V.4. Géométrie de la bobine et distribution de  $T_0$

Il est aisé de calculer analytiquement  $T_0$ , et d'ailleurs, le coût du calcul est très faible compte tenu de la réduction du domaine de calcul et à la simplicité de la formule utilisée. Cependant, la modélisation des bobines quelconques n'est pas prise en compte, et surtout le problème d'imprécision dans les régions perméables resurgit (cf. chapitre I).

#### V.3.1.2. Cas des conducteurs massifs

En pratique, la densité de courant n'est pas toujours connue au préalable dans les conducteurs massifs, elle n'est généralement pas uniforme dans la section du conducteur. Une telle circonstance nécessite alors des méthodes de calcul différentes. Côté éléments nodaux, Biro a été proposé une méthode de résidus pondérés [Biro-93b]. Nous avons pour notre part élaboré une méthode numérique basée sur la loi de Biot-Savart [Luong-97].

##### Méthode de résidus pondérés [Biro-93b]

Le potentiel  $T_0$  peut être également obtenu en résolvant les équations de champ magnétostatique dans le domaine d'étude  $\Omega$  comprenant la région conductrice  $\Omega_c$  et la région non conductrice  $\Omega_n$ . L'interface entre deux régions est dénotée par  $\Gamma_{nc}$ .

Le problème peut être formulé par les équations différentielles suivantes

$$\text{rot}(\text{grad} T_0) - \text{grad}(\rho \text{div} T_0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (V.17)$$

$$\text{rot}(\text{rot} T_0) - \text{grad}(\text{div} T_0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_n \quad (V.18)$$

$$T_{0t} = H_{jt} \quad \text{sur } \Gamma_{nc} \quad (V.19)$$

où  $H_j$  est le champ source calculé par la loi de Biot-Savart d'un courant quelconque à courant

total imposé traversant  $\Omega_c$ .

Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre, mais elle peut poser des problèmes d'imprécision à l'interface de la région conductrice, issus de la faible valeur éventuelle de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}_j$ . Par ailleurs, elle exige également le calcul d'un potentiel vecteur dans tout le domaine.

#### *Calcul par la loi Biot-Savart [Luong-97]*

Pour une famille donnée de conducteurs massifs, la présence du courant peut être prise en considération par un calcul préalable du champ magnétique par la loi de Biot-Savart. La densité de courant source peut considérer comme uniforme à condition que le courant total soit imposé. La densité de courant effective dans la région conductrice et le champ magnétique prennent les formes suivantes

$$\mathbf{J} = \text{rot}(\mathbf{T} + \mathbf{H}_j) \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.20})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j + \mathbf{T} - \text{grad } \phi_r \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.21})$$

où  $\phi_r$  est le potentiel scalaire réduit.

Les équations différentielles avec terme de pénalité sont

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{T} + \mathbf{H}_j)) - \text{grad}(\rho \text{div} \mathbf{T}) + \partial(\mu \mathbf{T} + \mu \mathbf{H}_j - \mu \text{grad } \phi_r) / \partial t = 0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.22})$$

$$\text{div}(\mu \mathbf{T} + \mu \mathbf{H}_j - \mu \text{grad } \phi_r) = 0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.23})$$

$$\text{div}(-\mu \text{grad } \phi) = 0 \quad \text{dans le reste} \quad (\text{V.24})$$

Cette méthode permet de limiter le calcul de  $\mathbf{T}_0$ , qui est  $\mathbf{H}_j$  dans ce cas, aux conducteurs massifs seuls, ce qui signifie un effort de calcul moins important. Le problème de connexité est traité en introduisant une coupure dans la région environnant des conducteurs. Cependant le nombre de types de bobine susceptibles d'être appliqués est restreint et cette méthode n'est pas adaptée au cas des conducteurs massifs en fonctionnement magnétostatique.

#### *V.3.1.3. Discussions*

Suite au tour d'horizon des méthodes de calcul de  $\mathbf{T}_0$ , nous gardons pour notre part la méthode analytique utilisant le potentiel vecteur  $\mathbf{T}_0$  dans un domaine limité, comprenant la bobine et son trou, dans le cas particulier de conducteurs bobinés plans. Cependant, les méthodes existantes ne nous permettent pas de nous adapter à la diversité de types de conducteurs, à savoir les conducteurs quelconques massifs ou bobinés ainsi que le cas particulier d'un conducteur massif plan.

Par ailleurs, l'idée de restreindre le calcul dans un domaine très limité est extrêmement intéressante mais elle n'a été appliqués qu'aux conducteurs bobinés plans. Dans les autres cas, une telle démarche n'a pas encore été développée.

Or nous avons intérêt à effectuer un calcul, qui est restreint lui aussi à une région limitée, en proposant une démarche plus complète permettant d'introduire divers types de bobines.

### V.3.2. Méthodes proposées

Dans la littérature, la démarche que nous avons adoptée n'a été utilisée que pour le cas de conducteurs bobinés plans. Pour rendre complète la démarche de calcul de  $\mathbf{T}_0$ , il nous faut développer également un procédé pour les conducteurs massifs ou bobinés de forme quelconque et ainsi que pour le cas particulier des conducteurs massifs plans.

#### *V.3.2.1. Conducteurs bobinés quelconques*

Dans les conducteurs de forme quelconque illustrée à la figure V.5, un calcul analytique de  $\mathbf{T}_0$  est difficile à réaliser, surtout lorsque le conducteur possède une hauteur variable d'un point à l'autre. Dans ce cas le potentiel  $\mathbf{T}_0$  peut être obtenu en minimisant une fonctionnelle appropriée où le terme  $\rho(\text{div}\mathbf{T}_0)^2$  est introduit afin d'assurer la convergence de la résolution.

$$\int_{\Omega_c + \Omega_t} (\rho(\text{rot}\mathbf{T}_0 - \mathbf{J}_s)^2 + \rho(\text{div}\mathbf{T}_0)^2) d\Omega \quad (\text{V.25})$$

où  $\mathbf{J}_s$  est la densité de courant effective,  $\Omega_c$  est la région conductrice et  $\Omega_t$  est son trou.

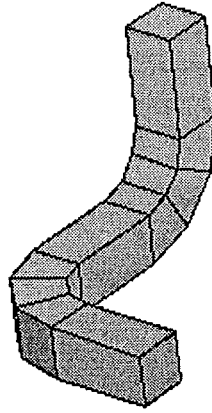


Figure V.5. Conducteur de forme quelconque

Soit  $\Gamma_0$  est l'interface de l'ensemble de  $\Omega_c + \Omega_t$  comme le montre la figure V.6.

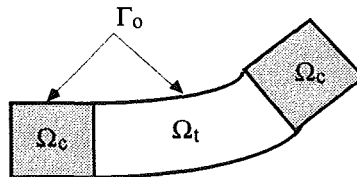


Figure V.6. Région conductrice, trou et interface  $\Gamma_0$

En vue d'assurer l'unicité de la solution, la condition aux limites suivante sera utilisée

$$\mathbf{T}_0 \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{V.26})$$

Pour que le courant soit bien perpendiculaire aux bornes de la bobine, une condition Dirichlet de  $T_{0n}$  est imposée (figure V.7)

$$\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{V.27})$$

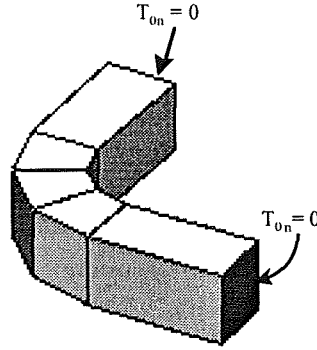


Figure V.7. Contraintes aux bornes du conducteur

A la fin de la résolution par la méthode des éléments finis nodaux, on obtient

$$\text{rot } \mathbf{T}_0 = \mathbf{J}_s \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (\text{V.28})$$

$$\text{div } \mathbf{T}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (\text{V.29})$$

$$\text{où } \mathbf{J}_s = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_t \quad (\text{V.30})$$

#### Remarque

Lorsque nous n'utilisons la fonctionnelle (V.25) que dans la bobine en appliquant la condition (V.27) seule, nous observons également la convergence de la résolution sans que l'unicité de la solution puisse être démontrée. Dans ce cas, l'interface de couplage est laissée sans contrainte. Le calcul n'est alors effectué que dans le conducteur, ce qui est très intéressant au niveau du coût de la résolution.

#### V.3.2.2. Conducteurs massifs quelconques

Contrairement aux conducteurs bobinés, la densité de courant dans les conducteurs massifs n'est pas connue suite à la présence des courants induits et la distribution non uniforme des courants. Pour que la fonctionnelle présentée dans la section précédente puisse être applicable, la densité de courant « source »  $\mathbf{J}_0$  doit être calculée au préalable. Cette densité de courant peut être obtenue par une résolution du problème électrocinétique de telle sorte que le courant total  $I$  soit imposé

$$\mathbf{J}_0 = \sigma \text{ grad } V \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.31})$$

ce qui mène à une résolution en potentiel scalaire électrique  $V$  dans le conducteur selon l'équation différentielle suivante

$$\text{div } (\sigma \text{ grad } V) = 0 \quad \text{dans } \Omega_c \quad (\text{V.32})$$

avec les conditions suivantes

$$V = V_1 \quad \text{au premier borne} \quad (\text{V.33})$$

$$V = 0 \quad \text{au deuxième borne} \quad (\text{V.34})$$

où  $V_1$  est le potentiel scalaire électrique qui est choisi de telle façon que le courant total prenne la valeur  $I$  donnée. La figure V.8 montre ces conditions.

Pour déterminer  $V_1$ , dans un premier temps, une valeur unité est utilisée, ce qui donne un courant total  $I_0$  après la résolution électrocinétique. La valeur effective de  $V_1$  est donnée par  $V_1 = I/I_0$

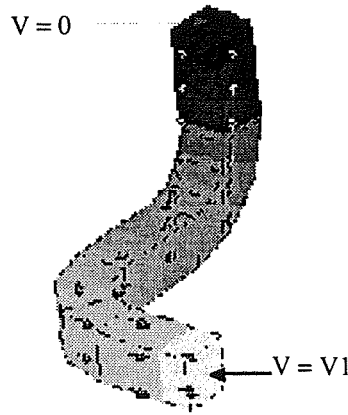


Figure V.8. Conditions aux limites de  $V$  aux bornes du conducteur

Ensuite,  $\mathbf{T}_0$  est obtenu en minimisant la fonctionnelle

$$\int_{\Omega_c + \Omega_t} (\rho(\text{rot} \mathbf{T}_0 - \mathbf{J}_0)^2 + \rho(\text{div} \mathbf{T}_0)^2) d\Omega \quad (\text{V.35})$$

avec toujours les mêmes conditions aux limites que les précédentes

$$\begin{array}{ll} \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur les bornes} \\ \mathbf{T}_0 \wedge \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}$$

### V.3.2.3. Conducteurs massifs plans

Dans le cas particulier des conducteurs plans massifs, le potentiel  $\mathbf{T}_0$  peut être considéré comme unidimensionnel et un scalaire est suffisant pour le définir. Nous pouvons alors proposer une méthode scalaire en considérant les relations suivantes

$$\mathbf{T}_0 = T_0 \mathbf{z} \quad \text{dans } \Omega_o \quad (\text{V.36})$$

$$\mathbf{T}_0 = \text{constant} \quad \text{dans } \Omega_t \quad (\text{V.37})$$

L'équation  $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{T}_0) = 0$  devient

$$\text{div} (\text{grad } T_0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_o \quad (\text{V.38})$$

Les conditions aux limites sont illustrées à la figure V.9 et prennent les formes suivantes

$$T_0 = I / h \quad \text{dans } \Omega_t \quad (V.39)$$

$$T_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{oext}} \quad (V.40)$$

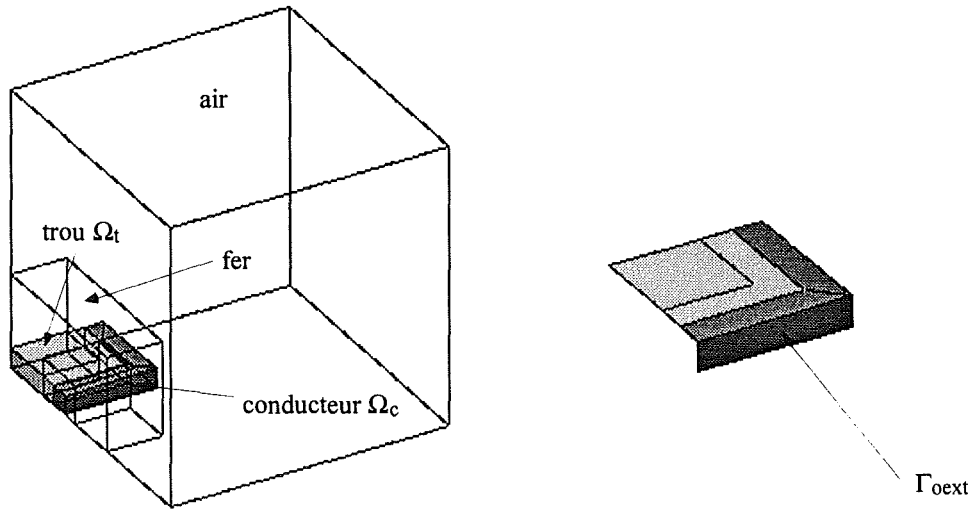


Figure V.9. Illustration du trou  $\Omega_t$  et la frontière « extérieure »  $\Gamma_{\text{oext}}$  du conducteur plan

La figure V.10 montre la distribution de  $T_0$  dans le cas des conducteurs massifs plans.

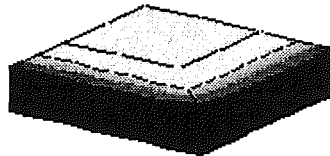
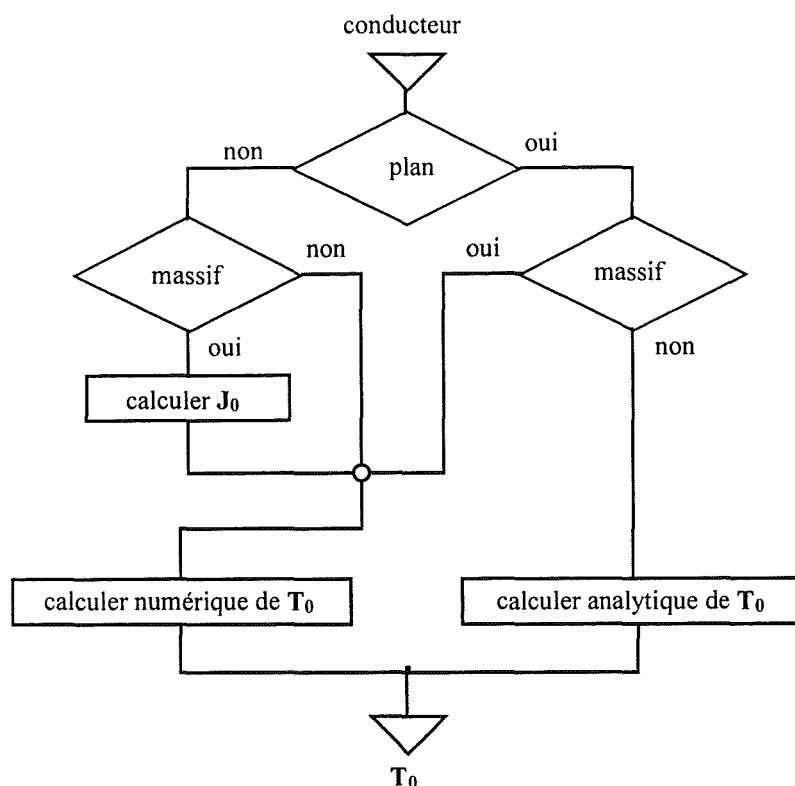


Figure V.10. Distribution de  $T_0$  du conducteur plan massif

Cette démarche permet un calcul extrêmement économique. De plus, pour les conducteurs massifs plans en fonctionnement magnétostatique, la distribution de la densité de courant n'est pas uniforme. Par conséquent, la méthode numérique proposée est préférable à celle analytique car elle favorise la représentation effective du courant.

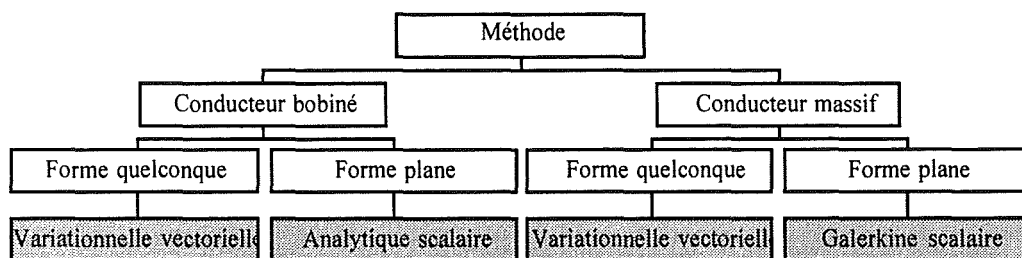
### V.3.3. Synthèse du calcul de $T_0$

Vu la diversification de types de conducteurs à traiter, nous souhaitons les systématiser dans le schéma suivant

Figure V.11. Schéma de synthèse du calcul de  $T_0$ 

### V.3.4. Résumé

En résumé, les méthodes adoptées pour calculer  $T_0$  sont illustrées à la figure V.12.

Figure V.12. Méthodes adoptées pour le calcul de  $T_0$ 

Pour les conducteurs bobinés de forme quelconque, le calcul d'un potentiel vecteur est effectué à l'aide de la méthode variationnelle. Si le conducteur est massif, la démarche est similaire sauf que la densité de courant est calculée au préalable en régime électrocinétique.

Dans le cas particulier des conducteurs plans, un calcul d'un potentiel scalaire suffira. Pour les conducteurs bobinés plans, le potentiel  $T_0$  est calculé analytiquement selon les données géométriques des bobines. Cependant, dans le cas des conducteurs plans massifs pouvant être le siège des courants induits ou d'une distribution non uniforme de la densité de courant, nous avons proposé également un calcul numérique utilisant la méthode variationnelle [Luong-97b].

#### V.4. Démarche tenant compte du problème de connexité

La prise en compte du problème de connexité est effectuée en utilisant la surface de coupure (cf. chapitre III). L'intérêt réside dans deux aspects.

Premièrement, le champ magnétique est calculé directement en utilisant le potentiel scalaire total dans tout le domaine sauf les conducteurs, éliminant ainsi les pertes de précision dans les régions perméables

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \phi \quad (\text{V.41})$$

Deuxièmement, le potentiel vecteur  $\mathbf{T}_0$  est calculé dans un domaine très limité, comprenant la région conductrice et son trou. En outre, dans les problèmes magnétodynamiques alimentés par une source de courant, comme dans notre cas, nous n'avons besoin  $\mathbf{T}_0$  que dans la bobine conductrice. Les valeurs de  $\mathbf{T}_0$  dans le trou, étant constantes pour les bobines planes, seront pourtant utiles pour établir la relation entre le circuit électrique et le flux dans l'étude des problèmes magnétodynamiques alimenté par une source de tension, développé dans le chapitre suivant.

##### *Remarque*

Il faut faire attention à l'utilisation du potentiel scalaire dans les régions conductrices. La présence de  $\mathbf{T}_0$  rend discontinus les potentiels scalaires magnétiques de part et d'autre de l'interface des conducteurs. Par conséquent, le champ magnétique s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= - \text{grad } \phi \\ \mathbf{H} &= \mathbf{T}_0 + \mathbf{T} - \text{grad } \phi_0 \end{aligned} \quad (\text{V.42})$$

où  $\phi_0$  est le potentiel scalaire associé à  $\mathbf{T}_0$ .

La continuité du champ magnétique sera assurée en utilisant une démarche similaire à celle que nous avons adoptée dans le chapitre I: un potentiel scalaire surfacique  $\Delta\phi_0$  sera calculé par la méthode variationnelle selon l'équation suivante

$$\text{grad}_S \Delta\phi_0 = \mathbf{T}_{0t} \quad (\text{V.43})$$

##### V.4.1. Cas général

Dans le cas général, il s'agit d'une résolution en trois temps. La coupure est introduite dans la région hors de la région conductrice, généralement dans le trou, pour traiter le problème de connexité.

##### *Première résolution*

Calcul de  $\mathbf{T}_0$  dans le trou et le conducteur



*Deuxième résolution*

Calcul de  $\Delta\phi_0$  sur l'interface de couplage et sur la coupure avec

- une condition ponctuelle sur  $\Delta\phi_0$  pour fixer  $\Delta\phi_0$  quelque part
- une condition de type “flottante coque” de  $\Delta\phi_0$  sur la coupure (cf. chapitre III)

*Troisième résolution*

Calcul de  $\mathbf{T}$ ,  $\phi_0$  dans le conducteur et de  $\phi$  dans le reste du domaine avec

- une condition de couplage entre  $\phi_0$  et  $\phi$
- une condition ponctuelle sur  $\phi_0$  pour fixer  $\phi$  et  $\phi_0$
- une condition de type “translation coque” pour  $\phi$  sur la coupure (cf. chapitre III)
- une condition  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur l'interface de couplage

V.4.2. Cas présentant une symétrie

Il s'agit aussi d'une résolution en trois temps. Mais ici la coupure est implicitement introduite, donc le maillage s'en trouve simplifié. Le problème de connexité est traité en jouant uniquement sur les conditions aux limites du plan de symétrie à champ normal.

*Première résolution*

Calcul de  $\mathbf{T}_0$  dans le trou et le conducteur

*Deuxième résolution*

Calcul de  $\Delta\phi_0$  sur le couplage pour assurer la continuité tangentielle du champ magnétique

- une condition ponctuelle sur  $\Delta\phi_0$
- des conditions flottantes de  $\Delta\phi_0$  sur le plan à champ normal

*Troisième résolution*

Calcul de  $\mathbf{T}$ ,  $\phi_0$  dans le conducteur et de  $\phi$  dans le reste du domaine avec

- une condition de couplage entre  $\phi_0$  et  $\phi$
- une condition ponctuelle sur  $\phi_0$  pour fixer  $\phi$  et  $\phi_0$
- des conditions flottantes pour  $\phi_0$  et  $\phi$  sur le plan à champ normal
- une condition  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur l'interface de couplage

**V.5. Validation**

La méthode présentée est validée quantitativement en comparant avec un cas axisymétrique. Elle est également appliquée dans un dispositif réel d'une micro bobine.

### V.5.1. Comparaison avec un cas axisymétrique

Le support de validation de ces formulations consiste en un problème axisymétrique pour lequel les résultats des calculs tridimensionnels sont comparés avec ceux obtenus par la formulation axisymétrique en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ .

#### *Description du problème*

Il s'agit d'un problème magnétodynamique axisymétrique contenant un circuit magnétique cylindrique à perméabilité relative  $\mu_r = 1000$  et une bobine à conductivité de  $5,6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ . La figure V.13 montre la géométrie et le maillage du problème. Les dimensions de la géométrie sont données en millimètres sur la figure V.14. Le courant total de la bobine est imposé et vaut 300A.

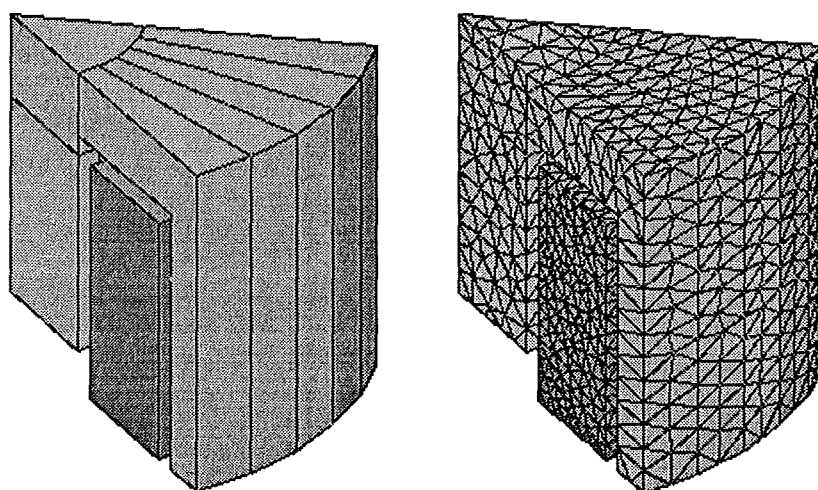


Figure V.13. Géométrie et maillage du problème

#### *Résultats de référence*

Les résultats 3D fournis par les formulations proposées sont comparés avec ceux en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  en axisymétrie considérés comme une référence. Les valeurs sont prises sur la ligne AB de la figure V.14 dans laquelle  $r = 25 \text{ mm}$  et  $30 \geq z \geq 0 \text{ mm}$ .

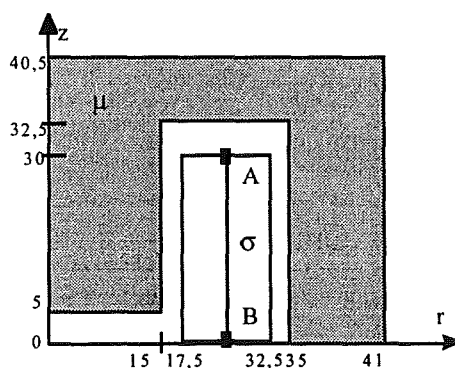


Figure V.14. Dimension de la géométrie du cas de validation axisymétrique

Dans le modèle de référence, la formulation en  $\mathbf{A}\mathbf{V}$  est utilisée dans le conducteur et en  $\mathbf{A}$  dans le reste du domaine. Le premier cas de comparaison est effectué en utilisant la formulation vectorielle en  $\mathbf{T}_0$  (cf. V.3.2.2) pour la région conductrice massive. Comme le conducteur est plan, nous pouvons également utiliser la formulation scalaire en  $T_0$  (cf. V.3.2.3).

### Comparaison

Les résultats, obtenus par les formulations mentionnées ci-dessus et présentés sur la figure V.15, montrent une cohérence très satisfaisante.

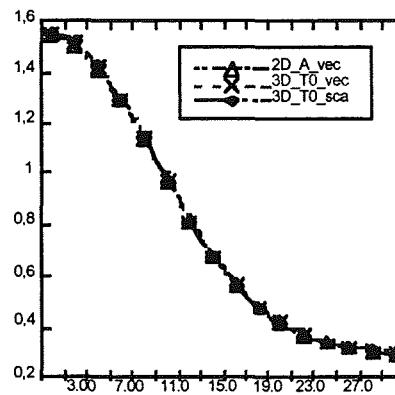


Figure V.15. Module de la densité de courant sur AB

### V.5.2. Micro bobine [Marlio-96]

La méthode est aussi appliquée au cas réel d'une micro bobine à champ intense. Le principe de cette micro bobine consiste à créer un champ magnétique le plus grand possible dans la région d'air en utilisant une boucle de conducteur de dimension très petite et de densité de courant très concentrée. Le courant traversant la boucle produira un champ de grande valeur dans la région environnant le centre de la boucle conductrice. La géométrie de cette micro bobine est décrite sur la figure V.16.

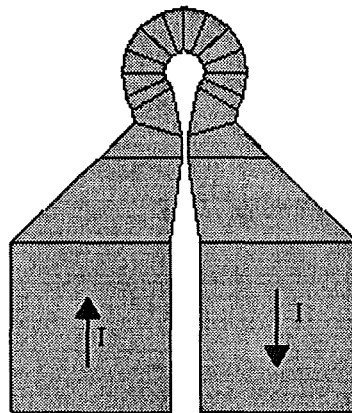


Figure V.16. Description de la micro bobine

Comme la géométrie est symétrique, une modélisation de la moitié est suffisante. La figure V.17

montre le maillage du motif, dans lequel les éléments hexaédriques sont utilisés car ils s'avèrent être bien adaptés à la faible épaisseur du modèle.

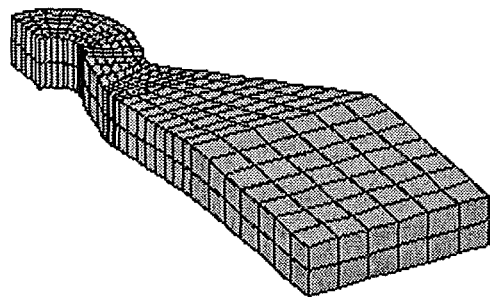


Figure V.17. Maillage de la micro bobine

Ce que l'on souhaite, c'est que la densité de courant soit la plus concentrée au centre de la boucle pour que le champ magnétique soit le plus grand possible à ce niveau. La figure V.18 montre ce genre de distribution concernant le module de la densité de courant.

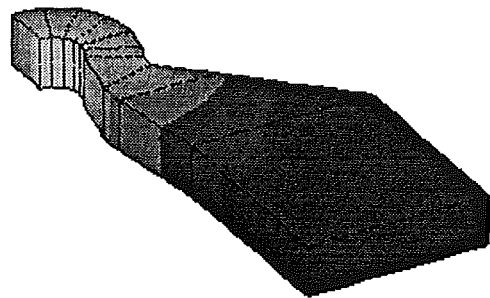


Figure V.18. Distribution du module de la densité de courant dans la micro bobine

Les caractéristiques des résolutions sont indiqués au tableau V.1.

Tableau V.1  
Caractéristiques des résolutions

Potentiel à calculer	V	$T_0$	$\Delta\phi_0$	$T, \phi$ et $\phi_0$
nombre d'éléments	420	420	350	2590
nombre d'inconnues	2537	6423	1000	13674
nombre de coefficients non nuls	54970	372970	9296	599448
place mémoire (MB)	1,96	12,45	0,37	39,90
nombre moyen d'itérations linéaires	16	96	18	21
station	HP712/80	HP712/80	HP712/80	HP712/80
temps total de CPU (s)	28	394	8	883

V.6. Conclusions

Une formulation économique et générale a été développée pour modéliser les problèmes 3D magnétodynamiques à courant total imposé en utilisant le potentiel vecteur électrique combiné avec le potentiel  $T_0$ .

Le calcul de  $\mathbf{T}_0$  a été étudié en tenant compte de la présence des bobines inductrices très diversifiées. En analysant les méthodes existantes qui cherchent à calculer  $\mathbf{T}_0$ , nous avons développé les nouvelles méthodes en vue de systématiser la procédure de calcul. Les traitements peuvent porter désormais sur tous les cas existants de conducteurs. Une synthèse de la méthode de calcul a été réalisée.

Le problème de connexité a été pris en compte dans la démarche. La démarche proposée peut s'appliquer au cas général ainsi qu'au cas particulier présentant une symétrie.

Enfin la méthode a été validée quantitativement dans un cas axisymétrique et dans le cas réel d'une micro bobine à champ intense.

## Références

- [Biro-93] O. Biro, K. Preis, G. Vrisk et F.R. Richter, "Computation of 3-D Magnetostatic Fields using a Reduced Scalar Potential", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1329-1332, 1993.
- [Biro-93b] O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk et F.R. Richter, "Computation of 3-D Current Driven Skin Effect Problems using a Current Vector Potential", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1325-1328, 1993.
- [Golovanov-97] C. Golovanov, Y. Maréchal et G. Meunier, "Formulation Magnétostatique "Compatible" en Potentiel Vecteur, basée sur les Eléments d'Arête", *Submis à Physique III*, Paris, 1997.
- [Kladas-92] A.G. Kladas et J.A. Tegopoulos, "A New Scalar Potential Formulation for 3-D Magnetostatics Necessitating no Source Field Calculation", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 1103-1106, 1992.
- [Luong-97] H.T. Luong, Y. Maréchal et G. Meunier, "Computation of 3-D Current Driven Eddy Current Problems using Cutting Surfaces", *IEEE Trans. on Mag.*, 1997.
- [Luong-97b] H.T. Luong, Y. Maréchal et G. Meunier, "Calcul Généralisé de  $T_0$  appliqué aux Problèmes Magnétostatique et Magnétodynamique", *submis à Physique III*, Paris, 1997.
- [Marlio-96] Coopération avec Marlio, thésard de CNRS pour modéliser les micros bobines.
- [Nakata-88] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and Y. Okada, "Improvement of the T- $\Omega$  Method for 3-D Eddy Current Analysis", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 94 -97, 1988.
- [Ren-96] Z. Ren, "Auto-gauging of Vector Potential by Iterative Solver - Numerical Evidence", *Proc. Electrical and Magnetic Fields*, Liège (Belgium), pp. 119-124, 1996.
- [Webb-89] J.P. Webb et B. Forghani, "A Single Scalar Potential Method for 3D Magnetostatics using Edge Elements", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 4126-4128, 1989.
- [Webb-90] J.P. Webb et B. Forghani, "A Scalar-Vector Method for 3D Eddy Current Problems using Edge Elements", *IEEE Trans. on Mag.*, pp. 2367-2369, 1990.



CHAPITRE VI

**PROBLEME MAGNETODYNAMIQUE A  
TENSION IMPOSEE**





## Chapitre VI. Problème magnétodynamique à tension imposée

### *Situation*

*La formulation en potentiel scalaire magnétique permet de modéliser les problèmes alimentés par une source de courant alors que dans de nombreuses applications seule la tension est connue au préalable.*

### *Question du chapitre*

*En tenant compte de l'existence de source de tension, peut-on économiser la modélisation magnétodynamique en utilisant le potentiel vecteur électrique ?*

### *Démarche directrice*

*La prise en compte de la source de tension se réalise en utilisant la résolution simultanée des équations de champ magnétique et de circuits électriques.*

### VI.1. Introduction

Une large gamme de dispositifs électromagnétiques est alimentée par des circuits électriques d'alimentation. Dans la pratique, il arrive souvent que le courant total soit inconnu alors que la tension est imposée par l'extérieur. Le problème est de connaître la distribution du champ magnétique dans le milieu continu et l'intensité des courants dans l'ensemble des conducteurs.

Il est bien connu que le problème magnétodynamique à tension imposée peut être résolu en utilisant une formulation en termes du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  et du potentiel scalaire électrique  $V$ . Même le problème magnétodynamique alimenté par une source de courant peut être résolu par la formulation en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  [Meunier-86]. Cependant, l'utilisation du potentiel vecteur dans tout le domaine d'étude conduit à un effort de calcul important, en particulier dans les problèmes tridimensionnels.

En tant qu'alternative, l'utilisation du potentiel vecteur électrique est extrêmement attrayante, puisqu'elle permet de réduire le nombre d'inconnues dans les régions environnant les conducteurs (cf. chapitre IV). A notre connaissance, une telle formulation n'a pas encore été étudiée pour les problèmes magnétodynamiques à tension imposée contenant les conducteurs massifs, par absence d'une relation de circuit qui relierait le courant total, la tension, le potentiel vecteur électrique et le potentiel scalaire magnétique.

La démarche directrice de ce chapitre est d'introduire et de démontrer une telle relation de circuit. Basé sur cette relation, le couplage entre des équations de champ magnétique en présence éventuellement de courants induits et des équations de circuits électriques peut être obtenue dans le cas d'une formulation en termes de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}_0$  et potentiel scalaire magnétique. Cette formulation nous permet de réduire le coût du calcul, surtout lorsque la région non conductrice contient un nombre important de noeuds, du fait que un simple potentiel scalaire sera suffisant dans cette région. Enfin nous proposons de résoudre simultanément les équations de circuits électriques et

de champ magnétique.

Le couplage entre équations de champ magnétique et de circuits électriques exige une relation dont l'expression dépend de l'existence des courants induits dans les bobines. Les bobines à traiter peuvent être soit des bobines filaires dont la densité de courant est connue a priori soit des bobines massives qui sont le lieu de courants induits.

## VI.2. Couplage entre équations de champ et de circuits électriques

Pour modéliser les problèmes magnétodynamiques à tension imposée à l'aide du potentiel vecteur électrique, il faut coupler les équations de champ magnétique et les équations de circuits électriques car la tension n'est pas explicite dans la formulation en potentiel vecteur électrique (cf. chapitre IV).

### VI.2.1. Problème type

Le domaine d'étude  $\Omega$  du problème type présente les régions conductrices  $\Omega_{kc}$  alimentées par une source de tension, des trous  $\Omega_{kt}$  bouchant les conducteurs  $\Omega_{kc}$  pour former des régions simplement connexes et le reste du domaine  $\Omega_r$ . La limite de l'ensemble des régions  $\Omega_{kc}$  et  $\Omega_{kt}$  est  $\Gamma_k$ . La région  $\Omega_r$  est prise suffisamment grande pour que ses frontières puissent être considérées comme l'infinie. La partie environnant les conducteurs peut contenir les circuits magnétiques éventuellement fermés et non linéaires. La figure VI.1 montre un tel problème type dans lequel  $I_k$  est le courant total parcourant le conducteur  $\Omega_{kc}$  et  $U_k$  est la tension imposée à ce conducteur.

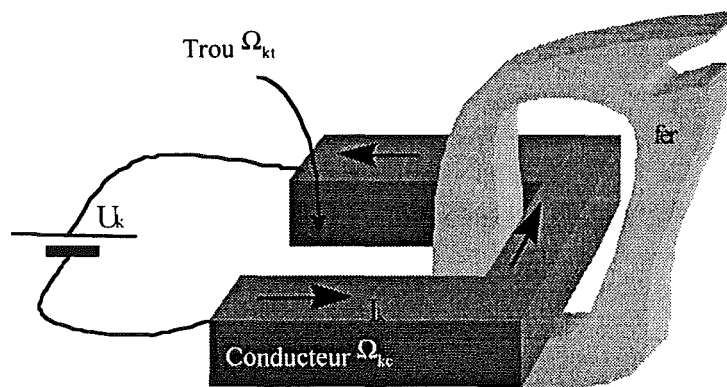


Figure VI.1. Problème type alimenté par une source de tension

### VI.2.2. Méthodes de couplage existantes

Les équations de champ magnétique et de circuits électriques ne sont pas indépendantes les unes des autres. Leur résolution exige un couplage.

Le couplage le plus facile à implanter est le couplage indirect, mais il n'est pas adapté à certains problèmes. Lorsqu'un couplage indirect ne correspond pas à la nature du problème, il est préférable d'introduire une méthode de couplage direct qui consiste à créer un système composé des équations liant les variables d'état du milieu continu et les variables des circuits électriques. Parmi les méthodes de couplage directes, il y a la méthode intégral-différentielle et la méthode

utilisant la résolution simultanée.

Les différentes méthodes de couplage seront présentées dans le cadre de la formulation en potentiel vecteur électrique.

#### VI.2.2.1. Couplage indirect

Le couplage entre le champ magnétique et les circuits électriques est effectué d'une manière indirecte. Les deux systèmes d'équations sont résolus successivement en prenant les termes sources issus de la résolution précédente. Les itérations sont répétées jusqu'à la convergence à la précision demandée.

L'équation matricielle du champ magnétique issue de la formulation  $\mathbf{T-T_0-\Omega}$  s'écrit

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \{I\} \quad (\text{VI.1})$$

dans laquelle  $M_{ij}$ ,  $S_i$  sont des sous matrices et sous vecteurs d'assemblage,  $\mathbf{T}$ ,  $\Phi$  et  $I$  sont les vecteurs de variables du champ et des circuits électriques. Les valeurs de  $I$  apparaissent comme termes sources du système et peuvent être calculées à partir de la résolution des équations des mailles [Dreher-94]

$$[Z]\{I\} = \{U\} - \frac{d}{dt}\{\Phi\} \quad (\text{VI.2})$$

où  $[Z]$  est la matrice d'impédance,  $\{U\}$  est le vecteur de tension imposée et  $\{\Phi\}$  est le vecteur de flux pouvant être calculé à son tour en fonction du champ magnétique.

Puisque les problèmes sont indépendants l'un de l'autre, nous pouvons envisager l'utilisation de logiciels bien adaptés à la résolution de telles équations. Le conditionnement de la matrice, correspondant à celui de la méthode des éléments finis, n'est pas modifiée par le couplage.

Par contre, lorsque les deux systèmes sont couplés d'une manière forte et que leurs constantes de temps sont proches l'une de l'autre, cette méthode demande un grand nombre d'itérations, particulièrement coûteuse pour un problème tridimensionnel. Par conséquent, un couplage indirect n'est envisageable que si la réaction d'un système par rapport à l'autre est suffisamment faible.

#### VI.2.2.2. Méthode intégro-différentielle

La méthode intégro-différentielle réalise un couplage direct des équations de champ magnétique et des équations de circuits électriques. Il s'agit d'inclure les équations liées aux circuits électriques dans les équations magnétiques [Brisset-94].

Considérons la relation de circuit, que l'on détaillera dans la suite

$$\{U\} = [Z]\{I\} + [M]\{\mathbf{T}\} + [N]\{\Phi\} \quad (\text{VI.3})$$

L'inversion de  $[Z]$  permet de donner une expression explicite du vecteur des courants

$$\{I\} = [Z]^{-1} (\{U\} - [M]\{T\} - [N]\{\phi\}) \quad (\text{VI.4})$$

Cette expression permet d'éliminer les courants des équations de champ. De cette façon, le système d'équations ne conserve comme inconnues que le potentiel vecteur électrique et le potentiel scalaire magnétique.

La matrice de rigidité des équations de champ est généralement une matrice très creuse. La figure VI.2 représente les emplacements classiquement occupés par les termes de cette matrice.

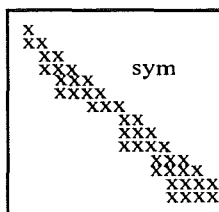


Figure VI.2. Structure topologique d'une matrice creuse symétrique

Par contre la matrice issue d'une méthode intégral-différentielle a des termes non nuls pour les inconnues liées aux noeuds des conducteurs. Les potentiels de ces noeuds sont couplés mutuellement à travers le comportement électrique du circuit. S'il y a plusieurs conducteurs liés à un circuit électrique dans le domaine magnétique, la matrice globale sera fortement remplie, occupant dans une place mémoire importante. La figure VI.3 montre la structure d'une telle matrice.

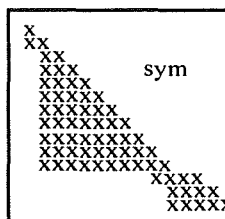


Figure VI.3. Structure de la matrice utilisant la méthode intégral-différentielle

Pour les calculs tridimensionnels, la taille de la matrice à stocker dépasse rapidement la mémoire disponible sur les stations de travail. D'autre part un algorithme itératif de résolution du système matriciel est généralement bien adapté à une structure creuse de la matrice. Une augmentation de la largeur de bande peut avoir des conséquences négatives sur la convergence de la résolution. Un solveur direct peut alors s'avérer mieux adapté mais il nécessite un rangement plein de la matrice. Enfin, la constitution de la matrice de rigidité en méthode intégral-différentielle nécessite une inversion de la matrice du système électrique ainsi que des opérations de multiplication de grandes matrices, qui exigent des algorithmes coûteux en temps CPU.

Malgré ses inconvénients, cette méthode induit un bon conditionnement de la matrice globale. L'ordre de grandeurs des coefficients issus du circuit électrique se trouve adapté au système des

équations du champ magnétique, ce qui conduit à une bonne précision numérique du calcul.

### VI.2.2.3. Résolution simultanée

La résolution simultanée des équations de champ magnétique et de circuits électriques est un couplage direct qui utilise mieux la place mémoire. Les inconnues à résoudre sont le potentiel vecteur électrique en chaque noeud de la région conductrice, le potentiel scalaire magnétique en chaque noeud du domaine d'étude et les courants dans les conducteurs.

Afin d'illustrer l'efficacité de la méthode de résolution simultanée, la structure de la matrice composée, est présentée sous une forme symbolique suivante

$$\begin{bmatrix} \text{système\_magn} & \text{terme\_couplage} \\ \text{terme\_couplage} & \text{système\_elec} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{var iable\_magn} \\ \text{var iable\_elec} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{source\_magn} \\ \text{source\_elec} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.5})$$

Le grand avantage de cette méthode est que la matrice de rigidité reste une matrice creuse. En effet, les matrices issues du système magnétique et électrique sont construites de manière traditionnelle, et on n'ajoute que des termes de couplage. Par conséquent, la place mémoire n'a guère augmenté. Contrairement à la méthode intégr-différentielle, un calcul supplémentaire des flux traversant les conducteurs n'est pas nécessaire et la valeur des courants est directement issue de la résolution.

Par contre, la matrice est moins bien conditionnée car il peut avoir des écarts importants entre les termes des équations de champ et ceux des équations de circuits. D'autre part, le nombre d'inconnues est légèrement augmenté.

### VI.2.2.4. Choix à effectuer

L'analyse des différentes méthodes montre que notre choix doit être guidé par le type de problème à traiter, par des facteurs informatiques tels que l'occupation mémoire, le temps de calcul et ainsi que par l'effort nécessaire pour la mise en oeuvre des algorithmes correspondants.

Afin de pouvoir traiter les problèmes électromagnétiques complexes dont les comportements électrique et magnétique peuvent être très variés, la méthode de couplage indirect n'est pas retenue ici. D'autre part la mémoire disponible sur les stations de travail actuelles ne permet pas la mise en oeuvre de la formulation intégr-différentielle. Pour les calculs tridimensionnels, l'utilisation de la méthode de résolution simultanée s'impose. La figure VI.4 illustre parmi les méthodes de couplage le choix effectué.

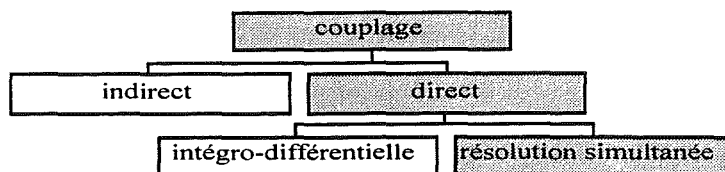


Figure VI.4. Choix de la méthode de couplage

Ce choix assure d'une part la possibilité de simuler des machines avec les moyens informatiques disponibles et d'autre part la généralité nécessaire pour la modélisation des différents types de dispositifs.

### VI.2.3. Nécessité des relations de circuit

Seules les équations de champ sont insuffisantes pour résoudre le problème magnétodynamique à tension imposée. La figure VI.5 montre l'obligation d'introduire une relation de circuit pour obtenir un système complet d'équations. Il s'agit d'une expression de la tension  $U$  en fonction du potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$ , du potentiel scalaire magnétique  $\phi$  et du courant total  $I$ .

$$\text{relation manquante} \longrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \phi \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix}$$

Figure VI.5. Manque de la relation de circuit

Cette relation diffère suivant le type de la bobine. On peut distinguer le cas des bobines filaires dont la densité de courant est connue et celui des bobines massives pouvant être le siège des courants induits.

## **VI.3. Résolution simultanée dans le cas des bobines filaires**

### VI.3.1. Equations de la formulation

Les bobines filaires constituées de fils ayant des dimensions faibles devant la profondeur de pénétration du champ magnétique, peuvent être considérées comme dépourvues de courants induits. Dans ce cas, le potentiel vecteur électrique est exclu de la formulation  $\mathbf{T}\mathbf{T}_0\Omega$ . Dû au calcul préalable de  $\mathbf{T}_0$ , la formulation devient scalaire, en pratique le seul potentiel à calculer étant le potentiel scalaire magnétique  $\Omega$ .

Comme la composante tangentielle de  $\mathbf{T}_0$  est nulle à la limite  $\Gamma_k$  de  $\Omega_{kc} + \Omega_{kt}$ , le couplage entre les potentiels scalaires est naturellement obtenu car le potentiel scalaire est continu dans tout le domaine d'étude. Le champ magnétique s'écrit

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi = I_k \mathbf{t}_{0k} - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{kc} + \Omega_{kt} \quad (\text{VI.6})$$

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \phi \quad \text{dans le reste} \quad (\text{VI.7})$$

où le courant  $I_k$  est une inconnue,  $\mathbf{t}_{0k}$  est issu d'un calcul correspondant à un courant total unité.

Nous remarquons également que  $I_k$  est le courant total traversant toute la section de la bobine:

$$I_k = N_s i_k$$

où  $N_s$  est le nombre de spires et  $i_k$  est le courant total d'alimentation effectif traversant un seul

fil.

Les équations de la formulation seront

$$\operatorname{div} \mu (I_k \mathbf{t}_{0k} - \operatorname{grad} \phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{kc} + \Omega_{kt} \quad (\text{VI.8})$$

$$\operatorname{div} \mu (-\operatorname{grad} \phi) = 0 \quad \text{dans le reste} \quad (\text{VI.9})$$

### VI.3.2. Relation de circuit

#### *VI.3.2.1. Expression de la relation de circuit*

Pour que le système global puisse être résolu, il faut introduire une relation entre le courant  $I_k$ , la tension  $U_k$  et le flux magnétique  $\Phi_k$  traversant la bobine  $k$  qui peut exprimer sous la forme suivante

$$U_k = R_k I_k + \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \quad (\text{VI.10})$$

On peut considérer la résistance  $R_k$  comme invariable.  $R_k$ , étant les pertes Joule pour un courant unité, peut être calculée par

$$R_k = \int_{\Omega_{kc}} \rho (\operatorname{rot} \mathbf{t}_{0k})^2 d\Omega \quad (\text{VI.11})$$

En vue d'établir une telle relation dans le cas des bobines filaires, la première étape à franchir est de calculer le flux  $\Phi_k$  traversant les bobines en termes des variables d'état du champ magnétique.

#### *VI.3.2.2. Flux magnétique traversant les bobines filaires*

Pour calculer  $\Phi_k$ , nous partons de l'expression de la coénergie

$$W' = \int_{\Omega} \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H} d\Omega \quad (\text{VI.12})$$

ce qui donne le flux traversant la bobine  $k$

$$\Phi_k = \frac{\partial W'}{\partial I_k} = \left. \frac{\partial W'}{\partial I_k} \right|_{\phi = \text{const}} + \left. \frac{\partial W'}{\partial \phi} \right|_{I_k = \text{const}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial I_k} \quad (\text{VI.13})$$

Par principe, la méthode de résolution minimise la fonctionnelle, et la dérivée partielle de la coénergie  $W'$  en termes de  $\phi$  avec les courants constants doit s'annuler. Ce qui donne



$$\Phi_k = \left. \frac{\partial W'}{\partial I_k} \right|_{\phi=\text{const}} = \int_{\Omega} \frac{\partial H}{\partial I_k} \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{VI.14})$$

Prenons (VI.6), on en déduit

$$\Phi_k = \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kt}} \mathbf{t}_{0k}^T \cdot \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kt}} \mathbf{t}_{0k}^T \mu (\mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi) d\Omega \quad (\text{VI.15})$$

Remarque: En tenant compte de (VI.10) et (VI.15), la forme intégrale de l'équation de circuit complète, par exemple dans le cas harmonique, sera

$$U_k = R_k I_k + j\omega \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kt}} \mathbf{t}_{0k}^T \mu (\mathbf{t}_{0k} I_k - \text{grad } \phi) d\Omega \quad (\text{VI.16})$$

### VI.3.3. Ecriture matricielle de la formulation

La forme discrète élémentaire de la formulation, en tenant compte des équations de champ magnétique et de la relation de circuit développée ci-dessus, s'écrit dans le cas harmonique:

$$\begin{bmatrix} F_{ij} & G_{ik} \\ G_{ik}^T & E_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ I_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ U_k / j\omega \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.17})$$

$$\text{où} \quad F_{ij} = \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kt}} (\text{grad } \alpha_i)^T \mu \text{grad } \alpha_j d\Omega \quad (\text{VI.18})$$

$$G_{ik} = - \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kt}} (\text{grad } \alpha_i)^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.19})$$

$$E_{kk} = \frac{R_k}{j\omega} + \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kt}} \mathbf{t}_{0k}^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.20})$$

La matrice est symétrique. Dans le cas général, un calcul en pas à pas dans le temps doit être effectué.

### VI.3.4. Prise en compte du problème de connexité par une coupure

L'utilisation de  $\mathbf{T}_0$  dans le trou de la bobine peut conduire à un problème d'imprécision similaire à celui rencontré dans les régions perméables (cf. chapitre I). Pour s'affranchir de ce problème tout en prenant en compte la connexité multiple, une coupure est utilisée (cf. chapitre III), ce qui conduit à calculer différemment le champ dans le conducteur et le trou

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi_0 = \mathbf{I}_k \mathbf{t}_{0k} - \text{grad } \phi_0 \quad \text{dans } \Omega_{kc} \quad (\text{VI.21})$$

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \phi \quad \text{dans le reste} \quad (\text{VI.22})$$

Dans ce cas, le potentiel scalaire n'est plus continu à travers l'interface entre  $\Omega_{kc}$  et  $\Omega_{kt}$ , donc un calcul de couplage entre  $\phi$  et  $\phi_0$  à l'aide de  $\Delta\phi_0$  s'impose (cf. chapitre I) pour assurer la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique

$$\text{grad}_S \Delta\phi_0 = \mathbf{t}_{0kt} \quad \text{sur le couplage} \quad (\text{VI.23})$$

avec la condition de couplage suivante

$$\phi - \phi_0 + \Delta\phi_0 \cdot \mathbf{I}_k = 0 \quad \text{sur le couplage} \quad (\text{VI.24})$$

La relation de circuit (VI.15) devient (toujours dans le cas harmonique)

$$U_k = R_k I_k + j\omega \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0kt}^T \mu (\mathbf{t}_{0k} I_k - \text{grad } \phi_0) d\Omega + j\omega \int_{\Omega_{kt}} \mathbf{t}_{0kt}^T \mu (-\text{grad } \phi) d\Omega \quad (\text{VI.25})$$

Nous arriverons finalement à une équation matricielle élémentaire

$$\begin{bmatrix} F_{ij} & 0 & G_{ik} \\ 0 & H_{ij} & 0 \\ G_{ik}^T & K_{kj} & E_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_k / j\omega \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.26})$$

$$\text{où } F_{ij} = \int_{\Omega_{kc}} (\text{grad } \alpha_i)^T \mu \text{grad } \alpha_j d\Omega \quad (\text{VI.27})$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega_{kt}} (\text{grad } \alpha_i)^T \mu \text{grad } \alpha_j d\Omega \quad (\text{VI.28})$$

$$G_{ik} = - \int_{\Omega_{kc}} (\text{grad } \alpha_i)^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.29})$$

$$K_{kj} = - \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0kt}^T \mu \text{grad } \alpha_j d\Omega \quad (\text{VI.30})$$

$$E_{kk} = \frac{R_k}{j\omega} + \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0kt}^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.31})$$

Nous pouvons constater que la matrice de rigidité n'est plus symétrique.

### VI.3.5. Démarche à suivre

En traitant le problème de connexité par une coupure, la résolution se déroule en trois temps.

Dans un premier temps, le calcul de  $t_{0k}$  dans la bobine et le trou avec un courant total unité est effectué (cf. chapitre V). Dans un deuxième temps, nous calculons  $\Delta\phi_0$  issu de  $t_{0k}$  sur le couplage entre le trou et la bobine et sur la coupure. Enfin, la résolution de  $\phi_0$ ,  $I_k$  dans la bobine et de  $\phi$  dans le reste avec la condition de couplage suivante

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi_0 \cdot I_k \quad \text{sur le couplage entre le trou et la bobine}$$

### I.4. Résolution simultanée dans le cas des bobines massives

Les bobines massives peuvent être le siège de courants induits dus à la pénétration du champ magnétique dans les régions conductrices. Nous avons constaté la nécessité d'une relation de circuit pour rendre complet le système à résoudre. Comme la densité de courant est inconnue dans les régions conductrices, un calcul électrocinétique préliminaire doit être effectué en vue de calculer  $T_0$  par la méthode variationnelle (cf. chapitre V).

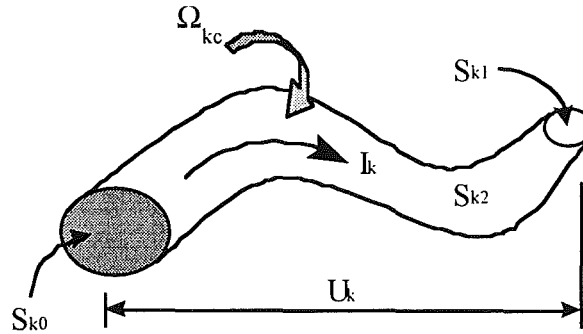


Figure VI.6. Problème type dans le cas des bobines massives

Le problème type que nous traitons est illustré à la figure VI.6, dans laquelle  $I_k$  est le courant

total traversant le conducteur  $\Omega_{kc}$ ,  $U_k$  est la tension imposée entre les bornes  $S_{k0}$  et  $S_{k1}$ , et la densité de courant est tangentielle à la surface  $S_{k2}$ .

#### VI.4.1. Equations de la formulation

##### VI.4.1.1. Calcul électrocinétique préliminaire

Calculer  $T_0$  exige un calcul préliminaire de la densité de courant  $j_{0k}$  qui peut être définie par

$$j_{0k} = \sigma \text{ grad } v$$

pour un courant total égal à 1A. Le potentiel scalaire électrique  $v$  est donné par la résolution électrocinétique de l'équation

$$\text{div} (\sigma \text{ grad } v) = 0 \quad (\text{VI.32})$$

Les conditions aux limites sont les suivantes

$$\partial v / \partial n = 0 \quad \text{sur } S_{k2} \quad (\text{VI.33})$$

$$v = v_1 = \text{constante} \quad \text{sur } S_{k1} \quad (\text{VI.34})$$

$$v = v_0 = \text{constante} \quad \text{sur } S_{k0} \quad (\text{VI.35})$$

$$U_k = v_1 - v_0 \quad (\text{VI.36})$$

Par définition, il existe un vecteur  $\mathbf{t}_{0k}$  de telle manière que

$$\mathbf{j}_{0k} = \text{rot } \mathbf{t}_{0k} \quad \text{dans } \Omega_{kc} \quad (\text{VI.37})$$

$$\mathbf{t}_{0k} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur la limite } \Gamma_k \quad (\text{VI.38})$$

$$\mathbf{t}_{0k} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \setminus (\Omega_{kc} + \Omega_{kt}) \quad (\text{VI.39})$$

où  $\mathbf{t}_{0k}$  peut être obtenu à l'aide d'une méthode variationnelle (cf. chapitre V). Basée sur  $\mathbf{j}_{0k}$  et  $\mathbf{t}_{0k}$  définis ci-dessus, la relation de circuit  $U_k(I_k)$  et les équations du champ magnétique du problème couplé vont être développées.

#### VI.4.1.2. Equations du champ magnétique

Le problème magnétodynamique tridimensionnel peut être modélisé par la formulation  $\mathbf{t}_{0k}$ - $\mathbf{T}$ - $\phi$  [Biro-93]. La densité de courant et le champ magnétique sont donnés par

$$\mathbf{J} = \text{rot } (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0) = \text{rot } (\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} I_k) \quad \text{dans } \Omega_{kc} \quad (\text{VI.40})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} I_k - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{kc} \quad (\text{VI.41})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{t}_{0k} I_k - \text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_{kt} \quad (\text{VI.42})$$

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \phi \quad \text{dans le reste} \quad (\text{VI.43})$$

où  $I_k$  est inconnu,  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{t}_{0k} I_k$  et dans  $\Omega_{kc}$  on a  $\text{rot}(\text{prot } \mathbf{t}_{0k}) = \mathbf{0}$  issu de la méthode de calcul  $\mathbf{t}_{0k}$ .

La condition aux limites sur  $\mathbf{T}$  est

$$\mathbf{T} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } S_{k2} \quad (\text{VI.44})$$

Les équations différentielles s'écrivent

$$\text{rot}(\text{prot}(\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} I_k)) - \text{grad}(\rho \text{div } \mathbf{T}) + j\omega\mu(\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} I_k - \text{grad}\phi) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_{kc} \quad (\text{VI.45})$$

$$\text{div } (\mu (\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} I_k - \text{grad}\phi)) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{kc} \quad (\text{VI.46})$$

$$\text{div } (\mu (\mathbf{t}_{0k} I_k - \text{grad}\phi)) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{kt} \quad (\text{VI.47})$$

$$\operatorname{div}(\mu(-\operatorname{grad}\phi)) = 0 \quad \text{dans le reste (VI.48)}$$

En tenant compte  $\operatorname{rot}(\operatorname{prot} \mathbf{t}_{0k}) = \mathbf{0}$ , les formes discrètes de ces équations seront

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{kc}} (\operatorname{rot} \mathbf{W}_i^T \operatorname{prot} \mathbf{T} + \operatorname{div} \mathbf{W}_i^T \rho \operatorname{div} \mathbf{T}) d\Omega + \int_{\Omega_{kc}} j\omega\mu \mathbf{W}_i^T (\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} \mathbf{I}_k - \operatorname{grad} \phi) d\Omega \\ - \int_{S_{k0}+S_{k1}+S_{k2}} \mathbf{W}_i^T (\operatorname{prot} \mathbf{T} \wedge \mathbf{n}) dS - \int_{S_{k0}+S_{k1}+S_{k2}} \mathbf{W}_i^T \cdot \mathbf{n} \rho \operatorname{div} \mathbf{T} dS = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.49})$$

$$\int_{\Omega_{kc}} \operatorname{grad} \alpha_i^T \mu (\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} \mathbf{I}_k - \operatorname{grad} \phi) d\Omega - \int_{S_{k0}+S_{k1}+S_{k2}} \alpha_i \mu (\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} \mathbf{I}_k - \operatorname{grad} \phi) \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{VI.50})$$

$$\int_{\Omega_{k1}} \operatorname{grad} \alpha_i^T \mu (\mathbf{t}_{0k} \mathbf{I}_k - \operatorname{grad} \phi) d\Omega - \int_{S_{k2}} \alpha_i \mu (\mathbf{t}_{0k} \mathbf{I}_k - \operatorname{grad} \phi) \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{VI.51})$$

$$\int_{\Omega_r} \operatorname{grad} \alpha_i^T \mu (-\operatorname{grad} \phi) d\Omega - \int_{\Gamma_k} \alpha_i \mu (-\operatorname{grad} \phi) \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{VI.52})$$

En tenant compte de la continuité de  $B_n$  et des relations suivantes

$$\mathbf{W}_i \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } S_{k2} \quad (\text{VI.53})$$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } S_{k0} + S_{k1} \quad (\text{VI.54})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad \text{sur } S_{k2} \quad (\text{VI.55})$$

$$\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } S_{k0} + S_{k1} \quad (\text{VI.56})$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } S_{k0} + S_{k1} \quad (\text{VI.57})$$

nous obtenons finalement

$$\int_{\Omega_{kc}} (\operatorname{rot} \mathbf{W}_i^T \operatorname{prot} \mathbf{T} + \operatorname{div} \mathbf{W}_i^T \rho \operatorname{div} \mathbf{T}) d\Omega + \int_{\Omega_{kc}} j\omega\mu \mathbf{W}_i^T (\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} \mathbf{I}_k - \operatorname{grad} \phi) d\Omega = 0 \quad (\text{VI.58})$$

$$\int_{\Omega_{kc}} \operatorname{grad} \alpha_i^T \mu (\mathbf{T} + \mathbf{t}_{0k} \mathbf{I}_k - \operatorname{grad} \phi) d\Omega = 0 \quad (\text{VI.59})$$

$$\int_{\Omega_{k1}} \operatorname{grad} \alpha_i^T \mu (\mathbf{t}_{0k} \mathbf{I}_k - \operatorname{grad} \phi) d\Omega = 0 \quad (\text{VI.60})$$

$$\int_{\Omega_i} \text{grad } \alpha_i^T \mu (-\text{grad } \phi) d\Omega = 0 \quad (\text{VI.61})$$

L'équation matricielle, dans le cas harmonique, prend la forme suivante

$$\begin{bmatrix} F_{ij} & E_{ij} & K_{ik} \\ E_{ij}^T & H_{ij} & L_{ik} \\ M_{ik} & N_{ik} & P_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \phi \\ \mathbf{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_k / j\omega \end{bmatrix} \quad (\text{VI.62})$$

$$\text{où } F_{ij} = \int_{\Omega_{kc}} (\text{rot } \mathbf{W}_i^T \rho \text{rot } \mathbf{W}_j + \text{div } \mathbf{W}_i^T \rho \text{div } \mathbf{W}_j + j\omega \mu \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_j) d\Omega \quad (\text{VI.63})$$

$$E_{ij} = \int_{\Omega_{kc}} j\omega \mu \mathbf{W}_i^T (-\text{grad } \alpha_j) d\Omega \quad (\text{VI.64})$$

$$K_{ik} = \int_{\Omega_{kc}} j\omega \mu \mathbf{W}_i^T \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.65})$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega_{kc}} \text{grad } \alpha_i^T \mu (-\text{grad } \alpha_j) d\Omega \quad (\text{VI.66})$$

$$L_{ik} = \int_{\Omega_{kc}} \text{grad } \alpha_i^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.67})$$

Pour déterminer les coefficients  $N_{ik}$ ,  $M_{ik}$  et  $P_{kk}$ , une relation de circuit  $U_k(I_k)$  pour la bobine massive doit être introduite dans le système global en vue de résoudre simultanément les équations de champ magnétique et de circuits électriques.

#### VI.4.2. Relation entre le courant total et la tension

L'objectif est d'établir la relation  $U_k(I_k)$  en termes du potentiel vecteur électrique et du potentiel scalaire magnétique. Cette relation peut être construite à partir de  $\mathbf{j}_{0k}$  et aussi à partir d'une relation duale en potentiel vecteur magnétique [Meunier-86].

##### *VI.4.2.1. Construction à partir de $\mathbf{j}_{0k}$ [Meunier-97]*

Soit  $v$  le potentiel scalaire électrique dans le conducteur, nous souhaitons montrer que

$$U_k = - \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \text{grad } v d\Omega \quad (\text{VI.68})$$

En effet, en remarquant que

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_{0k} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{j}_{0k} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{j}_{0k} \quad (\text{VI.69})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{0k} = 0 \quad (\text{VI.70})$$

nous en déduisons

$$\int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega_{kc}} \operatorname{div}(\mathbf{j}_{0k} \mathbf{v}) d\Omega = \int_{S_{k0}} \mathbf{j}_{0kn} v dS + \int_{S_{k1}} \mathbf{j}_{0kn} v dS + \int_{S_{k2}} \mathbf{j}_{0kn} v dS \quad (\text{VI.71})$$

Comme  $\mathbf{j}_{0kn} = 0$  sur  $S_{k2}$  et  $I_{0k} = 1$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\Omega = v_0 \int_{S_{k0}} \mathbf{j}_{0kn} dS + v_1 \int_{S_{k1}} \mathbf{j}_{0kn} dS + 0 = v_0 I_{0k} - v_1 I_{0k} = -U_k \quad (\text{VI.72})$$

ce que nous souhaitions démontrer.

D'autre part, puisque  $\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} \mathbf{v}$ , nous obtenons alors

$$U_k = - \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) d\Omega = \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \rho \mathbf{J} d\Omega + \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot j\omega \mathbf{A} d\Omega \quad (\text{VI.73})$$

Le développement de la première intégrale volumique de (VI.73) donne

$$\int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \rho \mathbf{J} d\Omega = \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \rho (I_{0k} \mathbf{j}_{0k} + \operatorname{rot} \mathbf{T}) d\Omega = I_{0k} \int_{\Omega_{kc}} \rho \mathbf{j}_{0k}^2 d\Omega + \int_{\Omega_{kc}} \rho \mathbf{j}_{0k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{T} d\Omega \quad (\text{VI.74})$$

Comme  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{j}_{0k} \wedge \mathbf{T}) = \rho \mathbf{j}_{0k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \operatorname{rot}(\rho \mathbf{j}_{0k})$ , la deuxième intégrale de (VI.74) devient

$$\int_{\Omega_{kc}} \rho \mathbf{j}_{0k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{T} d\Omega = \oint_{S_k} \rho (\mathbf{j}_{0k} \wedge \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} dS_k + \int_{\Omega_{kc}} \rho \mathbf{T} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{j}_{0k} d\Omega = 0 \quad (\text{VI.75})$$

car  $\mathbf{j}_{0k}$  est perpendiculaire avec  $S_{k0}$  et  $S_{k1}$ ,  $\mathbf{T}$  est perpendiculaire avec  $S_{k2}$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{j}_{0k} = 0$  dans  $\Omega_{kc}$  du fait que  $\mathbf{j}_{0k}$  dérive d'un gradient.

Cependant, la deuxième intégrale de (VI.73) s'écrit

$$\int_{\Omega_{kc}} \mathbf{j}_{0k} \cdot j\omega \mathbf{A} d\Omega = j\omega \int_{\Omega_{kc}} \operatorname{rot} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mathbf{A} d\Omega \quad (\text{VI.76})$$

$$\text{car } \operatorname{rot} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{t}_{0k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{t}_{0k}) \quad (\text{VI.77})$$

$$\text{donc } \int_{\Omega_{kc}} \text{rott}_{0k} \cdot \mathbf{A} d\Omega = \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mathbf{B} d\Omega + \oint_{S_k} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{t}_{0k}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{VI.78})$$

En intégrant dans  $\Omega_{kc} + \Omega_{kl}$  dont la limite possède une composante tangentielle nulle pour  $\mathbf{t}_{0k}$ , nous avons  $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{t}_{0k}) \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_k$  et alors

$$\int_{\Omega_{kc}} \text{rott}_{0k} \cdot \mathbf{A} d\Omega = \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kl}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mathbf{B} d\Omega + \oint_{\Gamma_k} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{t}_{0k}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kl}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{VI.79})$$

Finalement

$$U_k = I_k \int_{\Omega_{kc}} \rho j_{0k}^2 d\Omega + j\omega \int_{\Omega_{kc} + \Omega_{kl}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{VI.80})$$

La forme intégrale de la relation de circuit, dans le cas harmonique, devient

$$U_k = I_k \int_{\Omega_{kc}} \rho j_{0k}^2 d\Omega + j\omega \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0k} \mu (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi) d\Omega + j\omega \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0k} \mu (\mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi) d\Omega \quad (\text{VI.81})$$

#### VI.4.2.2. Construction à partir de la relation en $\mathbf{A}$ [Meunier-86]

D'après [Meunier-86], la relation de circuit dans le cas de bobines massives s'écrit

$$I_k = j\omega \int_{\Omega_{kc}} \sigma \mathbf{A} \text{grad} v_{0k} d\Omega + U_k \int_{\Omega_{kc}} \sigma (\text{grad} v_{0k})^2 d\Omega \quad (\text{VI.82})$$

où  $v_{0k}$  est la solution électrocinétique pour  $\Delta v_{0k} = 1$ . Donc

$$U_k = (I_k - j\omega \int_{\Omega_{kc}} \sigma \mathbf{A} \text{grad} v_{0k} d\Omega) / \int_{\Omega_{kc}} \sigma (\text{grad} v_{0k})^2 d\Omega \quad (\text{VI.83})$$

Dans la solution de  $v_{0k}$  correspondant à  $\Delta v_{0k} = 1$ , nous avons

$$\int_{\Omega_{kc}} \sigma (\text{grad} v_{0k})^2 d\Omega = (\Delta v_{0k})^2 / R_{0k} = 1/R_{0k} \quad (\text{VI.84})$$

alors que dans la solution de  $\mathbf{t}_{0k}$  correspondant à  $I_{0k} = 1$ , nous avons

$$\int_{\Omega_{kc}} \rho (\text{rott}_{0k})^2 d\Omega = R_{0k} I_{0k}^2 = R_{0k} \quad (\text{VI.85})$$

Nous pouvons déduire de (VI.83), (VI.84) et (VI.85)



$$U_k = I_k \int_{\Omega_{kc}} \rho (\text{rott}_{0k})^2 d\Omega - R_{0k} \cdot j\omega \int_{\Omega_{kc}} \rho \mathbf{A} \text{grad} v_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.86})$$

D'autre part, comme  $-\sigma \text{grad} v_{0k} = \text{rot } \mathbf{t}_{0k} / R_{0k}$ , nous obtenons donc

$$U_k = I_k \int_{\Omega_{kc}} \rho (\text{rott}_{0k})^2 d\Omega - j\omega \int_{\Omega_{kc}} \text{rott}_{0k} \mathbf{A} d\Omega \quad (\text{VI.87})$$

A partir de ce point, la démarche est similaire à la précédente pour obtenir finalement la même relation de circuit.

#### VI.4.3. Prise en compte du problème de connexité

Avec une démarche similaire au cas des bobines filaires, la coupure est utilisée pour traiter le problème de connexité, ce qui conduit aux formules suivantes du champ dans le conducteur massif et le trou

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi_0 = \mathbf{T} + I_k \mathbf{t}_{0k} - \text{grad } \phi_0 \quad \text{dans } \Omega_{kc} \quad (\text{VI.88})$$

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \phi \quad \text{dans le reste} \quad (\text{VI.89})$$

Le calcul de  $\Delta\phi_0$  est effectué pour assurer la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique sur l'interface de  $\Omega_{kc}$

$$\text{grad}_S \Delta\phi_0 = \mathbf{t}_{0kt} \quad \text{sur l'interface de couplage}$$

avec la condition de couplage suivante  $\phi - \phi_0 + \Delta\phi_0 \cdot I_k = 0$  comme précédemment.

La relation de circuit (VI.81) devient

$$U_k = I_k \int_{\Omega_{kc}} \rho j^2 d\Omega + j\omega \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0kt} \mu (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi_0) d\Omega + j\omega \int_{\Omega_{kt}} \mathbf{t}_{0kt} \mu (-\text{grad } \phi) d\Omega \quad (\text{VI.90})$$

Nous arriverons à la fin à une équation matricielle

$$\begin{bmatrix} C_{ij} & D_{ij} & 0 & E_{ik} \\ D_{ij}^T & F_{ij} & 0 & G_{ik} \\ 0 & 0 & H_{ij} & 0 \\ E_{ik}^T & G_{ik}^T & K_{kj} & E_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \phi_0 \\ \phi \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_k / j\omega \end{bmatrix} \quad (\text{VI.91})$$

où

$$C_{ij} = \int_{\Omega_{kc}} (\text{rot} \mathbf{W}_i)^T \rho \text{rot} \mathbf{W}_j d\Omega + \int_{\Omega_{kc}} (\text{div} \mathbf{W}_i)^T \rho \text{div} \mathbf{W}_j d\Omega + j\omega \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{W}_i^T \mu \mathbf{W}_j d\Omega \quad (\text{VI.92})$$

$$D_{ij} = - \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{W}_i^T \mu \text{grad} \alpha_i d\Omega \quad (\text{VI.93})$$

$$E_{ik} = \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{W}_i^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.94})$$

$$F_{ij} = \int_{\Omega_{kc}} (\text{grad} \alpha_i)^T \mu \text{grad} \alpha_j d\Omega \quad (\text{VI.95})$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega_t} (\text{grad} \alpha_i)^T \mu \text{grad} \alpha_j d\Omega \quad (\text{VI.96})$$

$$G_{ik} = - \int_{\Omega_{kc}} (\text{grad} \alpha_i)^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.97})$$

$$K_{kj} = - \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0k}^T \mu \text{grad} \alpha_j d\Omega \quad (\text{VI.98})$$

$$E_{kk} = \frac{R_k}{j\omega} + \int_{\Omega_{kc}} \mathbf{t}_{0k}^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VI.99})$$

Nous pouvons constater également que la matrice de rigidité n'est plus symétrique.

#### VI.4.4. Démarche à suivre

Il s'agit d'une résolution en quatre temps.

Dans un premier temps,  $\mathbf{J}$  est calculé dans le conducteur. Ensuite, le calcul de  $\mathbf{t}_{0k}$  dans le conducteur et le trou avec un courant total unité est effectué (cf. chapitre V). Dans un troisième temps, nous calculons  $\Delta\phi_0$  issu de  $\mathbf{t}_{0k}$  sur le couplage à l'interface du conducteur massif et sur la coupure (cf. chapitre I). Enfin, nous résolvons  $\mathbf{T}$ ,  $\phi_0$ ,  $\mathbf{I}$  dans le conducteur et  $\phi$  dans le reste en utilisant les conditions

$$\begin{array}{ll} \phi = \phi_0 + \Delta\phi_0 \cdot \mathbf{I} & \text{sur le couplage entre la bobine et le reste du domaine} \\ \mathbf{T} \wedge \mathbf{n} = 0 & \text{sur le couplage entre la bobine et le reste du domaine} \end{array}$$

#### **VI.5. Validation**

Le problème test constitué d'un conducteur massif est englobé dans l'air et alimenté par une tension de 0,1V. La conductivité du conducteur vaut  $10^6$  S/m. La figure VI.7 montre la géométrie du problème étudié. Les dimensions du problème sont indiquées sur la figure VI.8. La coupure est implicite et se situe sur le plan à champ normal. La figure VI.9 montre l'interface du

conducteur sur lequel les conditions de couplage sont imposées.

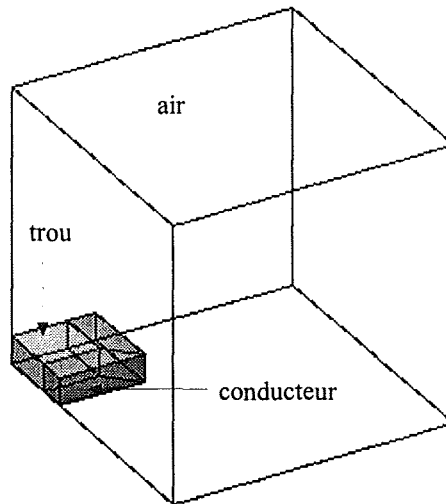


Figure VI.7. Géométrie du problème

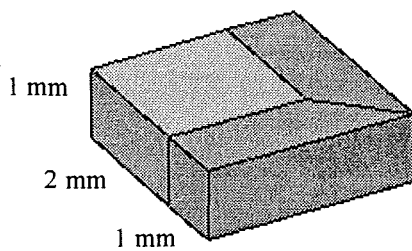


Figure VI.8. Dimensions du problème

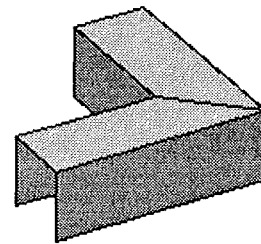


Figure VI.9. Interface de couplage

La méthode proposée a été appliquée pour résoudre ce problème. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par la formulation traditionnelle en AV. La cohérence est excellente. La différence sur le courant total obtenu par deux méthodes est inférieure de 1%. En plus, le temps CPU pour la résolution, le nombre d'inconnues et surtout la place mémoire nécessaire à la méthode proposée sont moins importants que ceux de la formulation standard en AV.

Le tableau VI.1 illustre les caractéristiques des résolutions.

Tableau VI.1. Caractéristique des résolutions

Formulation	AV-A	Méthode proposée	
		$T_0$	$IT\phi_0 - \phi$
nombre d'inconnues	19998	1301	9863
temps de CPU (s)	735	13	478
nombre d'itérations linéaires	27	9	15
place mémoire (Mb)	57.7	19.3	
courant total	219.68-j8.07	218.45-j7.98	

## VI.6. Conclusions

Nous avons présenté les méthodes de couplage entre équations de champ magnétique et de circuit électrique et nous avons choisi de développer la méthode basée sur une résolution simultanée de ces équations.

Pour résoudre simultanément des équations de champ magnétique et de circuit électrique dans le cas des bobines filaires, nous avons établi la relation de circuit reliant le courant total, la tension et le potentiel scalaire magnétique. La forme matricielle de la formulation a été présentée. Le problème de connexité a été pris en compte en utilisant une coupure à saut de potentiel. La démarche à suivre pour les bobines filaires a été également proposée.

Dans le cas des bobines massives, en effectuant une résolution simultanée des équations de champ et de circuit électrique, nous avons présenté les équations de la formulation. La mise en équation consiste à calculer au préalable un problème électrocinétique, ce qui revient à exiger une relation de circuit pour les bobines massives. Cette relation a été proposée et démontrée de deux façons différentes. La forme matricielle a été présentée et la prise en compte du problème de connexité a été traitée par une coupure. La démarche à suivre a été proposée pour effectuer la résolution simultanée pour les bobines massives.

La méthode proposée a été validée sur un exemple simple en comparant avec les résultats obtenus à l'aide de la formulation classique en potentiel vecteur magnétique.

## Références

- [Biro-93] *O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk et F.R. Richter*, "Computation of 3-D Current Driven Skin Effect Problems using a Current Vector Potential", IEEE Trans. on Mag., pp. 1325-1328, 1993.
- [Brisset-94] *S. Brisset*, "Finite Element Model for an Electronic-Magnetic-Mecanical Coupled Simulation of a Switched Reluctance Motor Start", Proceedings of CEFC, Aix-Les-Bains, July 1994.
- [Dreher-94] *T. Dreher*, "Couplage de la Méthode des Eléments Finis avec une Méthode d'Analyse du Circuit Electrique: Application à la Modélisation des Machines Electriques Tournantes", thèse de l'INPG, 1994.
- [Dreher-94b] *T. Dreher et G. Meunier*, "3D Line Current Model of Coils and External Circuits", Proceedings of CEFC, Aix-Les-Bains, July 1994.
- [Meunier-86] *G. Meunier et J.L. Coulomb*, "Solution of 3D Eddy Currents and Electrical Circuit Combined Problems", Eddy Current Seminar, Oxford, Mars 1986.
- [Meunier-96] *G. Meunier*, "Relation Courant Tension en Formulation  $T-T_0-\phi$ ", Document interne du LEG-INPG, 1996.
- [Meunier-97] *G. Meunier, H.T. Luong et Y. Maréchal*, "Computation of Coupled Problem of 3D Eddy Current and Electrical Circuit by using  $T_0-T-\Omega$  Formulation", soumis à COMPUMAG 1997, 1997.

PARTIE C

## **MISE EN OEUVRE ET VALIDATION**



## **Partie C: Mise en oeuvre et validation**

Vu la complexité de la mise en oeuvre de la formulation en potentiel scalaire magnétique, une automatisation du déroulement de modélisation semble être indispensable. De plus, la validité de nos études dans les problèmes magnétostatique et magnétodynamique nous a conduit à vouloir les mettre en situation réelle plus complexe dans laquelle plusieurs phénomènes physiques peuvent se coupler.

Cette partie, se composant des chapitres VII et VIII, a pour but d'automatiser la mise en oeuvre d'une démarche complexe de manière souple et structurée. Nous souhaitons également montrer la faisabilité de la modélisation d'une machine tournante et de son circuit d'alimentation en potentiel scalaire magnétique et vecteur électrique.

Le chapitre VII cherche à automatiser la mise en oeuvre d'une démarche complexe. Notre approche consiste à concevoir un langage dédié de haut niveau. Ce langage apporte une grande souplesse à l'automatisation pour une large gamme d'applications. Il favorise également la personnalisation et la réutilisation de la mise en oeuvre conçue.

La modélisation d'un moteur à réluctance variable exige un couplage entre plusieurs phénomènes physiques différents: le mouvement du rotor, les composants électriques, le champ magnétique et aussi le comportement temporel du modèle. Le dernier chapitre montre la faisabilité de notre démarche dans une telle modélisation.





## **CHAPITRE VII**

# **AUTOMATISATION DE LA MISE EN OEUVRE DE LA DEMARCHE**



## Chapitre VII. Automatisation de la mise en oeuvre de la démarche

### *Situation*

*La mise en oeuvre des formulations proposées exige une démarche souvent complexe à utiliser.*

### *Question du chapitre*

*Vu la complexité des démarches à adopter, peut-on envisager une automatisation de sa mise en oeuvre qui pourrait être à la fois personnalisée au gré des besoins, réutilisable et extensible pour une large gamme d'applications ?*

### *Démarche directrice*

*Il est possible de définir un langage dédié contenant des commandes de haut niveau qui apportera l'automatisation des services coûteux, la personnalisation de l'application aux besoins de l'utilisateur et la structuration de la démarche grâce à une conception en couches.*

## VII.1. Introduction

Les méthodes adoptées dans cette thèse nous permettent de modéliser des problèmes électromagnétiques à faible coût et avec précision. Cependant, les démarches proposées sont souvent complexes à manipuler pour l'utilisateur. Cette complexité provient du fait que la résolution doit être effectuée en plusieurs étapes et que l'enchaînement et le couplage des différentes étapes exige une bonne habileté de la part de l'utilisateur.

Hormis la mise en oeuvre des formulations en potentiel scalaire magnétique, de nombreuses applications numériques conduisent l'utilisateur à affronter une démarche complexe. La prise en compte des phénomènes physiques, tels le mouvement, les circuits d'alimentation, ou les phénomènes couplés mène également à l'application de procédures qui peuvent être complexes.

La démarche doit alors être automatisée. L'automatisation de la démarche est effectué dans ce chapitre à l'aide de commandes dédiées de haut niveau dont un premier dictionnaire est proposé mais qui peut bien sûr être étendu, voire servir aux utilisateurs pour créer des applications personnalisées.

Le langage que nous souhaitons concevoir est dédié à l'environnement d'applications électromagnétiques utilisant la méthode des éléments finis. L'efficacité de ce langage est illustrée à travers l'exemple d'un ralentisseur magnétique.

## VII.2. Automatisation de la démarche

### VII.2.1. Nécessité de l'automatisation

Les intérêts majeurs de l'automatisation de la démarche résident dans une grande facilité d'emploi, un risque moindre de fausses manipulations et une possibilité d'enchaîner automatiquement plusieurs procédures de calcul.

L'automatisation rend transparente la plupart des manipulations internes propre à une conception de l'application, d'où une facilité d'emploi accrue. Elle favorise l'adaptation de l'utilisateur face à un système évolué qui exige une connaissance globale de plus en plus complète. L'utilisateur est libéré des détails de mise en oeuvre, certes important pour le concepteur mais jouant un rôle mineur pour l'application à modéliser, tels la gestion des données, l'enchaînement des exécutions de base, etc.

Les erreurs humaines sont restreintes en automatisant l'enchaînement d'exécutions des commandes, et par conséquent les fausses manipulations sont moins fréquentes.

L'enchaînement automatique de la procédure apporte par ailleurs un gain de temps important puisqu'il y a moins d'interventions manuelles. L'automatisation permet également de libérer l'utilisateur d'une surveillance permanente, parfois juste pour introduire à temps les commandes nécessaires au déroulement en cours.

### VII.2.2. Méthodes existantes

L'automatisation de la démarche de modélisation peut être abordée principalement en suivant deux approches. L'une consiste à utiliser un langage de programmation classique et à coder chaque nouvelle démarche en tant que personnalisation du logiciel par ce moyen, l'autre est de fournir un nouveau langage, ensemble de commandes de haut niveau dédiées et généralement interprétées, qui permettra d'automatiser la modélisation selon des exigences éventuellement très personnalisées.

Avant passer en revue les différentes méthodes susceptibles d'être utilisées, soulignons la différence principale entre les langages structurés classiques et les langages dédiés de haut niveau. Les langages structurés qui sont destinés à programmer les applications plus ou moins universelles, alors que les langages dédiés visent plutôt l'environnement d'applications spécifiques.

#### *VII.2.2.1. Programmation structurée classique*

Le principe de la programmation structurée figée consiste à programmer au mieux l'application à l'aide d'un ensemble de commandes généralistes destinées à programmer une procédure quel que soit son domaine d'application. La démarche de l'application est transformée en code d'un langage structuré dans la mesure où la priorité est d'améliorer l'environnement de l'application.

#### *Intérêts*

Une telle démarche permet de mieux adapter aux besoins les applications à modéliser et d'optimiser l'application d'une façon « solide » une fois que la démarche de l'application est validée. Le système conçu répond de manière sûre aux besoins envisagés par un code pertinent, d'où une rapidité assurée. Ainsi, elle est capable de libérer considérablement l'intervention manuelle de l'utilisateur et d'exiger un savoir-faire minimal pour mener à bien la modélisation.

### *Inconvénients*

En réalité, une démarche de simulation n'est jamais figée dès sa première mise en oeuvre. Une programmation dite figée est mal adaptée à cette situation par manque de souplesse. Une bonne démarche consisterait à pouvoir « maquetter » l'application avec un langage très souple pour éventuellement coder l'application finale en programmation structurée si certaines contraintes l'exigent.

Vue du côté concepteur:

Pour fournir une interface suffisamment vaste satisfaisant aux besoins très diversifiés des utilisateurs, le travail du concepteur se trouve inévitablement alourdi. Le manque de souplesse se traduit par des changements importants de code lors de la modification du besoin ou pour un ajout de nouvelles fonctionnalités.

Vue du côté utilisateur:

La programmation figée, en tant qu'interface de communication logique entre l'utilisateur et le système, ne peut pas répondre totalement aux besoins de tout utilisateur. Cela provient du fait qu'il est techniquement impossible voire même non souhaitable de créer une programmation suffisamment générique pour satisfaire aux besoins de tous les utilisateurs. Pour l'utilisateur, ce mode de programmation restreint considérablement les possibilités d'automatiser sa propre démarche d'application.

#### *VII.2.2.2. Langage dédié de haut niveau*

Pour atteindre l'automatisation de la démarche, une autre approche consiste à concevoir un langage dédié de haut niveau. La solution qui peut être envisagée n'est plus de fournir un programme figé, mais plutôt la possibilité pour les utilisateurs avertis ou les concepteurs d'utiliser un langage spécifique adapté à l'automatisation d'un processus de résolution hautement variable. La conception des commandes du langage passe par une bonne définition des actions élémentaires dédiées qui constituent la base de diverses applications [Creveuil-74].

L'expérience semble montrer que les langages dédiés font partie d'un domaine un peu oublié parmi les travaux de recherche. Ceci provient peut-être de la difficulté de les situer. Pour ceux qui conçoivent les systèmes, définir un langage de ce type n'est sans doute pas la principale préoccupation, et pour ceux qui conçoivent les langages ils sont à la fois trop simples et trop dépendants des systèmes pour appartenir à leur domaine.

### *Intérêts*

Les avantages que présente cette philosophie générale au niveau de la conception globale d'un système sont multiples.

Le langage dédié apporte avec confiance une souplesse permettant d'aborder la grande diversité des applications. L'utilisateur ou le concepteur peut se définir l'enchaînement de commandes adapté à son propre besoin, ce qui favorise la personnalisation de l'utilisation. Ils peuvent

exploiter la base de données d'une façon parfaitement contrôlée, ce qui ouvre des domaines d'application très variés. Cette approche permet de traiter une large gamme d'applications tout en réduisant la charge pour le concepteur. Lors de la modification du besoin, l'intervention du concepteur est très restreinte.

En introduisant la notion de modularité, le langage dédié facilite également une conception en couches de l'application. Le concepteur peut organiser son application comme un ensemble structuré et réutilisable par autrui.

### *Inconvénients*

Contrairement à la programmation figée, les langages dédiés sont généralement interprétés. L'interpréteur doit le cas échéant apporter fiabilité et robustesse au langage par des contrôles stricts. Par ailleurs, la conception de l'ensemble des commandes de base joue clairement un rôle important sur la qualité de l'automatisation obtenue, et la détermination des commandes de base doit donc être effectuée avec grand soin.

#### *VII.2.2.3. Choix à effectuer*

Vu le confort et la souplesse qu'offre le langage dédié, il est intéressant de le développer. L'automatisation, effectuée par ce moyen, est retenue car elle garantit la personnalisation de l'interface de communication, réduit la charge du concepteur en s'adaptant aux besoins très diversifiés et enfin favorise une conception en couches; les commandes de base en bas niveau et les applications complexes en haut niveau.

Certes, un tel choix exige une réflexion pertinente sur le mécanisme du langage et les commandes qui doivent être proposées.

Soulignons cependant, que nous souhaitons pouvoir conserver la possibilité de programmer les algorithmes très coûteux en langage structuré classique, domaine pour lesquels ils excellent.

#### VII.2.3. Quelques langages dédiés à un environnement

Vers les années 1980, la complexité croissante des algorithmes et des données a rendu de plus en plus difficile le développement des logiciels et ont initié une réflexion générale sur les langages. Il s'agit de deux principales réflexions.

La première consiste à concevoir des mécanismes neutres indépendants de tout système matériel ou logiciel, qui facilitent l'échange et le partage de données entre différents systèmes manipulant le même type d'information. La norme STEP est la représentation récente de cette réflexion.

La seconde repose sur l'intégration des ressources d'un domaine de l'ingénierie. Cette philosophie favorise l'interaction et la convivialité des logiciels qui peuvent partager performances et données. En ce qui concerne le domaine de la modélisation des milieux continus, on peut mentionner le langage SIC, et dans un autre domaine scientifique le langage propre à un logiciel tel que MATLAB.

*Norme STEP [Bouazza-95]*

L'échange et le partage de données entre différents systèmes qui manipulent les mêmes types d'information posent des problèmes de compatibilité à différents niveaux: représentation, interprétation, etc. Il en résulte une grande difficulté pour un système à réutiliser les données produites par un autre système tout en préservant leur signification.

Dans de nombreux problèmes d'application, l'évolution des technologies de l'information et la complexité des environnements industriels opérant sur les mêmes types d'information ont poussé à concevoir et à développer une nouvelle approche méthodique, basée sur un niveau d'abstraction élevé pour représenter l'information. C'est ainsi qu'est né le projet sur la norme STEP (STandard for Exchange of Product data).

L'objectif de la norme STEP est d'offrir à l'utilisateur une technologie de l'information basée sur des mécanismes neutres indépendants de tout système matériel ou logiciel. Elle offre des ressources sous forme de bibliothèques de concepts, définies dans le langage de modélisation EXPRESS et réutilisables pour développer des modèles de données dans différents secteurs industriels. La norme comporte aussi les méthodes de mise en oeuvre informatique de ces modèles de données pour réaliser l'échange, le partage et l'intégration des données. Il s'agit en quelque sorte d'un langage dédié universel.

*Langage SIC [Eustache-95]*

Vers les années 1970, les premiers logiciels industriels de calcul numérique, à savoir NASTRAN, ANSYS, MEF/MOSAIC, ont vu le jour. Cependant, leur manque d'interaction et de convivialité ne les rendaient accessibles qu'à des utilisateurs avertis. SIC est un langage de modélisation né en 1985 qui a été créé pour répondre aux limitations de MEF/MOSAIC. Plusieurs versions se sont succédé. Toutes ces versions ont en commun le découpage en trois modules principaux: le gestionnaire d'entrées, le gestionnaire d'objets et la bibliothèque de commandes.

Le langage SIC est capable de regrouper toutes les opérations de calcul et de manipulation de données nécessaires pour exécuter des modélisations variées dans divers domaines de l'ingénierie. Il constitue également un langage extensible de modélisation permettant de tester de nouveaux algorithmes, de coupler des méthodes ou des modélisations utilisées jusqu'ici séparément, sans effort important de programmation. Il favorise la manipulation simultanée de plusieurs problèmes de modélisation pour les comparer ou les optimiser. Les structures de données sont enrichies tout en conservant l'efficacité requise pour traiter les simulations volumineuses. La génération de versions du logiciel adaptées à des types d'utilisateurs ou à des environnements est aisée à effectuer. SIC facilite également le développement et l'entretien du logiciel par des équipes éloignées et simplifie les échanges d'informations avec d'autres logiciels existants.

*Réflexion sur le langage dédié adopté*

Nous souhaitons pour notre part créer un langage dédié pour notre logiciel FLUX3D, afin



d'automatiser notre démarche de modélisation. Afin de le rendre utilisable pour des applications très variées, un mécanisme neutre indépendant de tout système doit être mis en oeuvre, ce qui conduit à une création d'un ensemble de commandes de base. D'autre part, pour enrichir les ressources du domaine d'application à traiter, un autre mécanisme, qui autorise le regroupement des commandes de base dans une structure modulaire, doit être élaboré.

### **VII.3. Mécanisme du langage dédié**

#### VII.3.1. Nos attentes

La raison majeure qui nous a poussé à élaborer un langage de commande dédié est la volonté d'automatiser notre démarche de manière souple. Bien évidemment, les possibilités offertes par cette méthodologie dépassent largement l'objectif initial.

Toutefois, ce langage, une fois mis en oeuvre, doit nous procurer deux fonctionnalités principales. D'une part, il doit permettre au concepteur ou à l'utilisateur d'accéder à certains niveaux de l'application. D'autre part, il doit faciliter la structuration de l'automatisation des applications complexes.

La structuration de l'automatisation des applications complexes conduit naturellement à concevoir un mécanisme qui permet de découper des ensembles de commandes de base en modules et par conséquent de fournir la possibilité de lancer des exécutions sous-jacentes: une exécution peut invoquer des exécutions sous-jacentes, leur laissant provisoirement le contrôle pour reprendre la main à la fin de leur exécution. Ce mécanisme est largement adopté par la plupart des langages structurés, cependant dans les logiciels d'applications comme le nôtre certains aspects informatiques, tels que la gestion des paramètres, la gestion de la mémoire, les appels récursifs, constituent des développements importants.

L'accès aisé pour l'utilisateur à certains niveaux de l'application est une exigence indispensable dans des modélisations complexes. Nous souhaitons un mécanisme qui permette à l'utilisateur d'accéder aisément à la base de données de l'application, à des algorithmes spécifiques et même aux algorithmes internes du logiciel éventuellement programmés en langage structuré. L'ensemble des commandes de base constitue alors des fondations permettant au concepteur de se définir un programme « sur mesure » adapté à ses propres besoins.

#### VII.3.2. Syntaxe des commandes de base

Le langage dédié est constitué d'un ensemble de commandes de base qui doivent être conçu avec grand soin afin de pouvoir s'adapter à divers types de modélisation. Une commande de base est définie comme une ligne logique qui est en soi un ensemble composé de mots. Par définition le premier mot de la ligne sera le nom de commande, les autres mots constitueront une liste de paramètres qui est associée à cette commande.

Par exemple, la récupération dans une table dynamique des faces qui bordent un volume donné peut effectuer par notre commande de base ZGET\_FIELD

```
ZGET_FIELD RB.F3D.VOLUME.BORD &VOL NBRFA NUMFA
```

Cette commande de base dispose d'un mot clé ZGET\_FIELD. Les quatre mots qui le suivent

définissent les paramètres nécessaires pour le fonctionnement correct de la commande. Le symbole spécial & qui précède le paramètre VOL signifie un transfert de valeur de la variable symbolique VOL. L'exécution de cette commande renvoie une table allouée dynamiquement de faces NUMFA dimension NBRFA. « RB.F3D.VOLUME.BORD » est l'indice de FLUX3D indiquant la relation entre l'objet VOLUME et ses BORD.

Les paramètres rencontrés dans les commandes de base peuvent être de plusieurs types: les constantes, les variables et ainsi que des tables dynamiques de variables.

L'ensemble de commandes de base doit comprendre les instructions de programmation structurée classique telles que DO, IF, ENDIF, GOTO, etc. La conception des commandes de base doit faciliter la manipulation des données déclarées, pour lesquelles l'utilisateur du langage est déchargé des contraintes d'allocation.

Les commandes de base doivent répondre au minimum à certaines exigences communes à toutes les applications. Sans vouloir être exhaustif, nous en citerons quelques unes:

+ Requête des données

- Récupération des attributs, des relations et du nom d'un objet

+ Branchement d'exécution

- Sélection la procédure à suivre sous certaines contraintes mathématiques
- Itération sur un groupe de commandes jusqu'à ce que l'on rencontre une condition d'arrêt
- Comparaison logique entre les variables à manipuler
- Saut d'un groupe d'instruction
- Appel à une autre commande

+ Dialogue automatique avec l'utilisateur

+ Contrôle d'erreurs

- Déclaration des variables propres de l'utilisateur
- Gestion de la création et libération automatique des tables dynamique de variables
- Gestion du transfert des données d'un paquet de commandes à l'autre
- Contrôle de la cohérence des données des commandes appelée et appelant

+ Aide pour l'utilisateur

- Commentaire d'explication
- Aide syntaxique
- Aide en ligne

La construction des commandes de base est évidemment décisive pour la qualité de

l'automatisation et la facilité d'adaptation aux divers aspects de modélisation.

### VII.3.3. Automatisation des applications complexes

Les commandes de base constituent des instructions élémentaires pour automatiser la mise en oeuvre de la démarche de modélisation. Cependant pour gérer avec efficacité des applications, le mécanisme de commandes de base seul ne suffit pas. L'utilisation directe des commandes de base dans les démarches sophistiquée conduit rapidement à une complexité importante du programme ainsi obtenu, d'où des difficultés de développement et de maintenance accrues.

Or nous souhaitons favoriser l'intervention de l'utilisateur avec contrôle à l'exécution des commandes, favoriser le déroulement automatique séquentiel des commandes de base et mixer des commandes en FORTRAN et en langage dédié.

La lisibilité et la structuration de cette programmation peuvent être améliorées en utilisant le mécanisme des exécutions sous-jacentes, que l'on s'appelle habituellement macro-commandes. L'interpréteur ou le compilateur identifie les macro-commandes par son mot clé (CALL dans notre cas). Le but que nous poursuivrons étant d'étendre les commandes de base par une macro-commande, il était alors souhaitable de conserver pour l'appel d'une macro-commande la même syntaxe que pour une commande de base

CALL nom\_de\_macro liste\_de\_paramètres

Par exemple, à partir de deux régions volumiques possédant les formulations FORM1 et FORM2 différentes on souhaite créer la région surfacique REGION possédant la formulation FORM3 qui comprend des faces interfaces entre les régions volumiques. La macro-commande peut s'écrire

Initialiser FORM1, FORM2 et FORM3

CALL creer\_region\_couplage &FORM1 &FORM2 &FORM3 REGION

La première étape consiste à déterminer s'il existe un fichier dont le nom est paramétré dans la commande émise, ici c'est le fichier creer\_region\_couplage. La phase suivante est le traitement des paramètres passés lors de l'appel de la macro-commande. Il s'agit d'affecter les différentes valeurs aux variables d'interface. Cette phase peut conduire à un arrêt du mécanisme d'interprétation de deux façons, soit parce que la syntaxe propre aux arguments n'a pas été respectée soit parce que les types des paramètres d'interface sont incohérents deux à deux. Après ces phases qui peuvent être considérées comme celle de l'initialisation de l'état d'interprétation de la macro-commande, commence l'interprétation proprement dite des lignes de la macro-commande. Ce mécanisme peut être réalisé récursivement.

En réalité, l'efficacité de ce mécanisme d'exécution sous-jacente peut être remise en cause pour certains algorithmes spécifiques particulièrement coûteux en temps d'interprétation et où la programmation par un langage structuré classique est plus adaptée.

Tenant compte de cette situation, nous avons adopté une approche qui autorise deux possibilités

de programmation de commande: soit en utilisant directement les commandes de base comme présenté précédemment, soit en appelant une procédure programmée en FORTRAN.

La deuxième possibilité préserve à une ouverture de développement pour des algorithmes spécifiques, qui ne sont pas toujours programmés efficacement en commandes de base, ou pour des algorithmes préexistants dans le logiciel de simulation et qui sont suffisamment « détachable » pour être mis à la disposition d'une utilisation externe.

Reprenons l'exemple précédent, la commande va chercher en priorité le fichier de commande qui s'appelle `créer_région_couplage` écrit en langage dédié. Si la recherche est échouée, elle va chercher à exécuter un algorithme spécifique présent dans les bibliothèques du logiciel.

## **VII.4. Réalisation informatique du langage**

### VII.4.1. Etat des lieux

Un langage de commande préexiste dans notre logiciel de développement FLUX3D. Il a pour objectif de permettre à l'utilisateur de pouvoir rejouer un enchaînement de commandes qu'il peut avoir exécuté et espionné auparavant ou tout simplement écrit à partir de rien dans un fichier. Il est important de noter que ce langage de commande ne correspond pas aux objectifs que nous cherchons à atteindre à travers le langage dédié dont il est question jusqu'à présent: d'un côté il s'agit de « mimer » l'interactivité existant dans FLUX3D, alors que de l'autre, le jeu de commandes et donc les fonctionnalités associées sont beaucoup plus vastes.

Cependant lors de la réalisation informatique, nous avons profité de cet environnement favorable où certains mécanismes propres à l'interprétation de commandes étaient déjà programmés. Nous avons mis à profit cet avantage pour élaborer des commandes de base supplémentaires adaptées à nos besoins. Par contre le langage de commande existant offrait déjà la possibilité d'interroger facilement la base de données du problème modélisé par la méthode des éléments finis.

Par ailleurs, le mécanisme de substitution des chaînes de caractères préexistait dans FLUX3D, ce qui autorisait l'utilisateur à pouvoir manipuler des paramètres formels. Les paramètres formels apparaissent dans le corps d'une commande pour indiquer l'endroit où leur seront substitués les arguments. Un paramètre formel est représenté par un nom précédé d'un caractère spécial &, par exemple la variable &VOL de l'exemple précédent.

Cependant, l'ensemble existant des commandes, ne répondait pas complètement nos attentes qui portent essentiellement sur l'automatisation des démarches complexes. Nous souhaitons dans notre cas travailler non seulement avec des variables formelles, qui sont disponibles dans notre environnement, mais aussi avec des tables dynamiques de variables. Par exemple la commande de récupération des faces d'un volume doit permettre de retourner la liste de faces dont le nombre n'est pas connu au préalable. De plus, nous souhaitons offrir la possibilité d'appeler un autre paquet de commandes du fait que la démarche peut être trop compliquée pour être programmée dans un seul fichier de commande.

#### VII.4.2. Démarche souhaitée

Nous souhaitons développer une démarche qui favorise à la fois l'ouverture de possibilités nouvelles pour l'utilisateur et l'enchaînement automatique des commandes.

Pour que l'utilisateur puisse automatiser sa modélisation, le langage dédié conçu doit inclure un accès à la base de données contrôlé et fiable. Le contrôle de fausses manipulations sera plus efficace en concevant les commandes de base ayant une forme condensée pour laquelle les considérations syntaxiques seront plus aisées à contrôler. L'appel récursif des procédures est également souhaité pour mieux structurer la programmation.

Pour mettre en oeuvre des modèles à démarche complexe, le langage est conçu de telle façon qu'il puisse enchaîner automatiquement une série de commandes tout en assurant une bonne allocation de la place mémoire et une bonne transmission des paramètres. Il faut offrir la possibilité d'appeler une autre procédure à l'intérieur d'une procédure en cours.

Par ailleurs, certains algorithmes sont trop sophistiqués pour pouvoir être traduits efficacement dans des commandes de base, alors la possibilité de profiter d'un langage structuré classique, tel que le FORTRAN ou C, sera intéressante. Cette possibilité doit être envisagée dans la conception du langage dédié.

#### VII.4.3. Gestion récursive des exécutions en couches

Un paquet de commandes peut contenir des commandes qui appellent d'autres paquets de commandes. Ce mécanisme d'appel peut naturellement atteindre un certain nombre de niveau. Une question naturelle est suscitée :

*Sur combien de niveau peut-on effectuer des exécutions sous-jacentes ?*

Pour les procédures simples, ce nombre de niveau est souvent limité. Cependant dans les applications réelles, on ignore souvent le nombre de niveau pouvant être atteint. Dans ce cas, une configuration avec un nombre maximal de niveau autorisé peut être inadaptée, bien que cette approche soit plus facile à concevoir. La méthode que nous choisissons est d'autoriser un appel sous-jacent récursif, sans limitation imposée au nombre d'appels.

#### VII.4.4. Gestion de la mémoire

Nous nous sommes intéressés à procurer aux utilisateurs un moyen de travailler avec des tables. Ceci rendra plus compacte la forme de la commande utilisée, faute de quoi une longue liste de paramètres est nécessaire pour représenter une table de variables. Constatons cette différence dans l'exemple précédent avec NBRFA = 2 qui suit

```
GET_FIELD    RB.F3D.VOLUME.BORD & VOLUME NBRFA NUMFA1 NUMFA2
ZGET_FIELD   RB.F3D.VOLUME.BORD & VOLUME NBRFA NUMFA
```

où GET\_FIELD et ZGET\_FIELD ont la même fonctionnalité, mais l'une travaille avec les variables, alors que l'autre peut manipuler une table dynamique.

Quelques nécessités découlent de l'emploi des tables. Les termes de la table A doivent non seulement être identifiables à partir de la forme statique, par exemple A[5], mais aussi sous la représentation formelle, par exemple A[&B]. Le langage que nous avons développé offre une telle possibilité.

Nous avons choisi par ailleurs d'allouer ces tables en « mémoire dynamique ». Pour fiabiliser le langage proposé, nous avons implanté un mécanisme de libération automatique des tables dynamiques non utilisées en fin de chaque procédure.

La réservation de tables dynamiques peut être réalisée en sortie de certaines commandes mais aussi explicitement et localement. Par exemple, on peut les déclarer en variables locales sans dimension précise et après, la taille effective de la table est retouchée selon les besoins par la commande RESIZE.

```
INTEGER    NUMFA[]
NBRFA = &NBRFA1 + &NBRFA2
RESIZE     NUMFA  &NBRFA
```

#### VII.4.5. Gestion des paramètres [Wilhelm-94]

Il y a deux points essentiels pour lesquels des difficultés peuvent survenir. Premièrement, la gestion des paramètres dans chaque paquet de commandes doit autoriser l'appel récursif. D'autre part, un bon contrôle de transmission des paramètres d'interface s'impose. Ceci permet de détecter des erreurs syntaxiques fréquentes et de fournir les informations pour les corriger.

Nous abordons le premier point concernant la gestion de paramètres dans le cadre des appels récursifs. Puisque la taille effective du réservoir des paramètres n'est pas connue au préalable, le stockage en pile est préférable à un stockage statique. Une fois une macro-commande activée, les paramètres concernant sont stockés dans une pile dont le bloc d'activation courant est associé à cette macro-commande. Ce bloc sera libéré lors de la fin de cette commande.

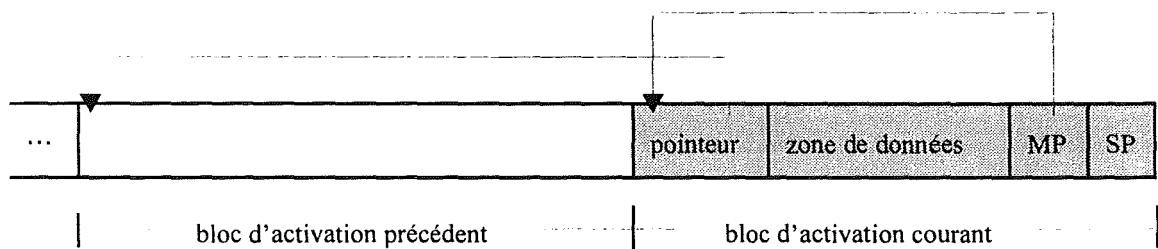


Figure VII.1. Bloc d'activation de la pile

Un bloc d'activation est constitué d'un pointeur sur le bloc d'activation du prédécesseur, la zone de données et certains registres générant la recherche des informations du bloc (figure VII.1).

Les appels récursifs sont rendus possibles par le pointeur sur le bloc précédent qui aide également à assurer que les entrées et fins de procédures se passent correctement.

La zone de données contient

- Une zone pour les valeurs, les adresses ou descripteurs des paramètres effectifs
- Une zone pour les variables locales de la procédure
- Une zone pour les tables dynamiques

Parmi les registres, les plus importants sont MP (en anglais « mark pointer ») et SP (en anglais « stack pointer »). MP pointe sur le début du bloc d'activation courant pour référencer la recherche des informations nécessaires du bloc. SP pointe sur la zone mémoire la plus haute allouée dans la pile pour préparer la création éventuelle de nouveau bloc d'activation.

Un autre point sur lequel nous voulons insister est la structure de déclaration des procédures. Une telle structure doit permettre de contrôler la transmission des paramètres au fur et à mesure du déroulement des commandes programmées. Nous sommes amenés à distinguer deux types de procédures, l'une est la procédure superviseur de plus bas niveau (« programme principal »), et les autres ont été par principe appelées par une procédure quelconque (« sous programme »).

Les structures pour déclarer le programme principal et les sous programmes sont illustrés par l'exemple suivant

```
MAIN
...
FORCPL = 3
CALL creer_region_couplage 1 2 &FORCPL REGCPL
...
END_MAIN
```

Dans laquelle 1 et 2 sont les constantes, FORCPL vaut 3.

Lorsque la commande CALL est interprétée, la procédure principale cherche à réaliser les commandes du fichier qui s'appelle creer\_region\_couplage. Dans ce fichier la structure des commandes sera

```
FUNCTION creer_region_couplage FOR1 FOR2 FOR3 REGC
INTERFACE
    INTEGER      FOR1
    INTEGER      FOR2
    INTEGER      FOR3
    INTEGER      REGC
END_INTERFACE
INTEGER         I
INTEGER         REG[10]
    Paquet de commandes
END_FUNCTION
```

Nous pouvons distinguer différentes catégories de paramètres comme le montre la figure VII.2

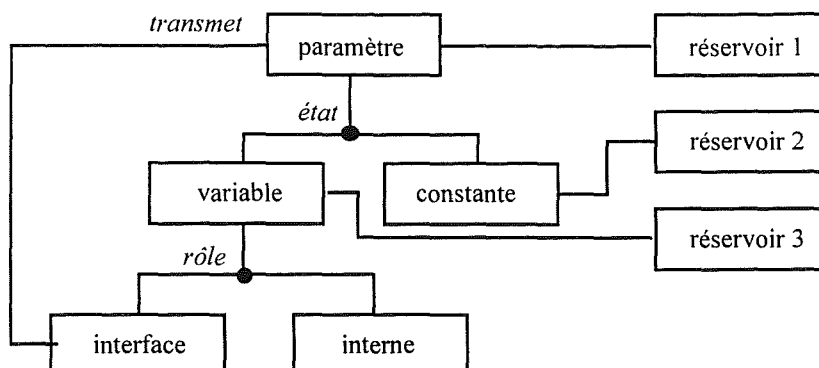


Figure VII.2. Structure des paramètres

Suivant l'indicateur *état*, le compilateur va distinguer les variables et les constantes. Parmi les variables, nous différencions les variables d'interface qui doivent subir les transmissions d'une procédure à l'autre, et les variables internes. Il faut donc trois réservoirs différents pour stocker les informations nécessaires des paramètres, des variables et des constantes. Chaque réservoir est organisé en pile pour faciliter les recherches récursives suivant le schéma de la figure VII.3.

Pour l'exemple utilisé, les valeurs effectives des paramètres seront

Paramètres: 1 2 &FORCPL REGCPL FOR1 FOR2 FOR3 REGC I REG[10]

➤ Constantes: 1 2 &FORCPL

➤ Variables: REGCPL FOR1 FOR2 FOR3 REGC I REG[10]

• Variables d'interface: FOR1 FOR2 FOR3 REGC

• Variables internes: REGCPL (bloc appelant)  
I REG[10] (bloc appelé)

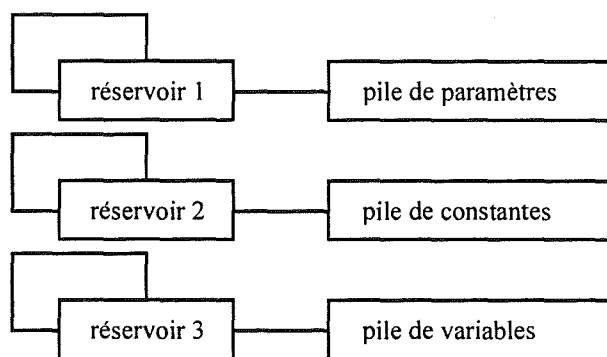


Figure VII.3. Réservoirs pour les paramètres

La commande de base MAIN commence le programme, elle nettoie la place mémoire des paramètres éventuellement issus d'autres programmes et elle rend également interprétable la procédure superviseur à lancer. La commande END\_MAIN termine la procédure superviseur en question en libérant tous les réservoirs de paramètres de commande, ce qui évite l'explosion de la mémoire lors d'une utilisation intensive du langage dédié. Entre les commandes MAIN et END\_MAIN se déroule les exécutions guidées par les commandes de base, contenant probablement des commandes de type CALL.



La transmission des paramètres est contrôlée par le descripteur d'interface pour être capable de signaler les anomalies à l'utilisateur. A l'intérieur du programme de commande, les commandes INTERFACE et END\_INTERFACE séparent les paramètres d'interface pour permettre d'effectuer le contrôle de cohérence. Les commandes FUNCTION et END\_FUNCTION déclarent le commencement et la fin de la procédure appelée qui doit libérer des tables de variables locales en sortant.

## VII.5. Descriptif du langage

### VII.5.1. Commandes de base

#### *Commandes de base préexistantes*

C :	Commentaire
CHARACTER	Déclaration d'une chaîne de mots
CLEAR	Destruction d'une variable
CREATE	Création d'une synchronisation
DELETE	Destruction d'une synchronisation
DISPLAY	Affichage de l'état d'une variable
GET_CASE	Récupération du CAS d'une occurrence
GET_FIELD	Récupération des relations d'une occurrence
GET_FIELD_S	Récupération des relations en sautant certaines valeurs
GET_INV	Récupération des relations inverses d'une occurrence
GET_INV_S	Récupération des relations inverses en sautant
GET_NAME	Récupération du nom d'une occurrence
GET_NAME_S	Récupération du nom d'une occurrence en sautant certaines valeurs
GET_NEXT	Récupération de la occurrence successive d'un objet
GET_TOTAL	Récupération du nombre effectif de occurrence d'un objet
GOTO	Saut d'un groupe d'instructions
HELP	Aide
IF	Branchement d'exécution
INPUT	Saisie interactive d'une variable
INTEGER	Déclaration d'un entier
LABEL	Définition d'une étiquette par nom
OUTPUT	Message sur l'écran
PAUSE	Temporisation
R :	Interaction en ligne
REAL	Déclaration d'un réel
WAIT	Attente d'une synchronisation

#### *Commandes de base développées*

CALL	Appel d'une procédure
ZGET_FIELD	Récupération d'une table de relations d'un objet
ZGET_INV	Récupération d'une table de relations inverses d'un objet

FUNCTION	Déclaration d'une procédure
END_FUNCTION	Fin d'une procédure
INTERFACE	Déclaration des variables d'interface
END_INTERFACE	Fin de la déclaration des variables d'interface
MAIN	Déclaration d'une procédure superviseur
END_MAIN	Fin d'une procédure superviseur
RESIZE	Retouche de la taille effective d'une table

### VII.5.2. Commandes propres à la mise en oeuvre de notre démarche

#### *Activité des régions physiques*

CALL activer_groupe_reg	Associer une formulation à un groupe de régions volumiques
CALL activer_region_surf	Associer une formulation à une région surfacique
CALL desactiver_groupe_reg	Dissocier une formulation d'un groupe de régions volumiques
CALL desactiver_region_surf	Dissocier une formulation d'une région surfacique

#### *Créations des conditions aux limites*

CALL creer_Dirichlet_ponct_crt	Créer 1 condition ponctuelle Dirichlet du potentiel source
CALL creer_Dirichlet_ponct_red	Créer 1 condition ponctuelle Dirichlet du potentiel réduit
CALL creer_cont_couplage	Créer une condition de couplage entre potentiels réduit et total
CALL creer_cont_lin_flottant	Créer une condition linéique flottante d'un potentiel
CALL creer_cont_surf_normal	Créer une condition surfacique à champ normal d'un potentiel

#### *Création des régions de couplage*

CALL creer_reg_couplage	Créer une région surfacique de couplage
-------------------------	---

#### *Fonction sur les faces du plan à champ normal*

CALL faces_champ_normal	Récupérer les faces à champ normal
CALL faces_nor_formulation	Récupérer les faces à champ normal liées à 1 formulation

#### *Fonction FORTRAN*

CALL paquet_faces_disjoint	Récupérer les paquets de faces disjointes d'une liste de faces
CALL ligne_normal	Récupérer les lignes à champ normal du couplage entre potentiels réduit et total

#### *Autres*

CALL formulation_par_nom	Récupérer la formulation par son nom
CALL groupe_reg	Récupérer les régions ayant la formulation donnée
CALL resoudre_etape	Résoudre avec une option sur le calcul vectoriel des variables

## VII.6. Validation

### VII.6.1. Exemple simple

Pour illustrer l'automatisation par langage dédié, nous prenons un exemple simple d'une recherche dans la base de données d'une formulation à partir de son nom. La syntaxe de cette commande dans la procédure appelant prend la forme suivante

```
CALL  formulation_par_nom  &NOMFOR FORMUL
```

Une fois que cette commande est mise en action, elle cherche à enchaîner le paquet de commandes qui se trouvent dans le fichier `formulation_par_nom`. A titre d'exemple, nous mentionnons le listing de ce fichier ci dessous

```
FUNCTION formulation_par_nom  NOMFOR  NUMFOR
  C : Recherche de la formulation dans la base de données selon le nom
  INTERFACE
    CHARACTER  NOMFOR
    INTEGER    NUMFOR
  END_INTERFACE
  C : Interface d'entrée
  C : NOMFOR : Nom de la formulation
  C : Interface de sortie
  C : NUMFOR : Numéro de formulation
  C : Historique
  C : 280297 : Version initiale (LHT)
  C : Déclaration des variables locales
  INTEGER      NBRFO
  INTEGER      IFO
  INTEGER      NNOM
  INTEGER      NOM
  C : Nombre total des formulations dans la base de données
  GET_TOTAL    RB.PRO. FORMULATION  NBRFO
  C : Initialisation
  IFO = 0
  FOR = 0
  C : Boucle sur les formulations
  LABEL  DEB_FOR
    IFO = &IFO + 1
    C : Test d'arrêt
    IF ( &IFO > &NBRFO )          GOTO  FIN_FOR
    C : Formulation suivante
    GET_NEXT    RB. PRO. FORMULATION  &FOR  FOR
    C : Nom de la formulation
    GET_NAME    RB. PRO. FORMULATION. NOM  &FOR  NNOM  NOM
    C : Fin si le nom est trouvé
```

```

IF ( &NOM .LEQ. &NOMFO )      GOTO    FIN_FOR
C : Continue à boucler
GOTO    DEB_FOR
LABEL  FIN_FOR
C : Fin de la procédure
END_FUNCTION

```

### VII.6.2. Ralentisseur magnétique

Bien entendu, l'utilité du langage dédié autorise les applications plus complexes que la précédente. Nous essayons d'appliquer la méthode d'automatisation développée dans un cas réel complexe pour lequel les interventions manuelles pour sa mise en oeuvre sont excessivement coûteuses et hasardeuses.

Le problème à traiter est la modélisation du ralentisseur magnétique en fonctionnement magnétostatique par la formulation en potentiels réduit et total. La figure VII.4 montre la géométrie et le maillage de ce ralentisseur.

Supposons que la géométrie soit mise en forme. La région volumique ferromagnétique est le support de calcul de la formulation en potentiel scalaire total, et le reste est représenté par le potentiel scalaire réduit. Supposons donc que les formulations soient bien affectées aux régions volumiques correspondantes. Enfin, nous supposons que l'utilisateur ait introduit les contraintes aux bornes du domaine: tangent, normal ou infini. Ces manipulations ne sont pas trop fastidieuses grâce à l'interactivité graphique de notre logiciel FLUX3D. Il nous reste tout même de nombreuses interventions à mener au niveau de la physique avant d'être prêt pour lancer le calcul du champ qui est lui même dispose de deux étapes de résolution différentes.

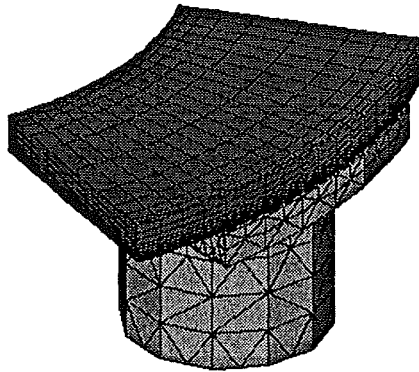


Figure VII.4. Géométrie et maillage du ralentisseur

En réalité, vu la complexité de la géométrie du problème, la création de la condition de couplage et de la région surfacique associée, qui servira de support au calcul du couplage, n'est pas évidente car certaines faces sont habituellement non visibles. Dans ce cas, certaines manipulations sont indispensables pour les rendre visibles; donc une procédure minutieuse et hasardeuse. Par ailleurs, la mise en place des conditions aux limites supplémentaires, à savoir les conditions de type flottant linéique ou surfacique et aussi les conditions ponctuelles, nécessite elle aussi une bonne habileté de la part de l'utilisateur.

Enfin, la résolution de notre problème se déroule en deux étapes, la première consistant à résoudre le potentiel scalaire source  $\Delta\phi$  sur la région de couplage, et la seconde calculant le potentiel scalaire total dans les régions perméables et le potentiel scalaire réduit dans le reste du domaine. Ce découpage exige une surveillance de l'utilisateur pour introduire au bon moment les changements nécessaires concernant les régions à calculer et les formulations à affecter.

L'automatisation d'une telle procédure est indispensable. Nous souhaitons aboutir à l'automatisation des manipulations coûteuses dans les phases de description de la physique et de résolution, telles que

+ la création automatique des conditions aux limites dites « traditionnelles »:

- Conditions ponctuelles de type Dirichlet sur les potentiels réduit et source
- Conditions linéiques de type flottant sur le potentiel source
- Conditions surfaciques de type champ normal pour les potentiels réduit et total

+ la création automatique de la condition de couplage,

+ la création automatique des régions de couplage qui sont supports de calcul de couplage,

+ l'enchaînement automatique de la résolution en deux temps.

### *Scénario de la démarche*

Créer la région de couplage et la condition de couplage

Créer les conditions ponctuelles et surfaciques de type Dirichlet

Créer les conditions linéiques de type flottant

Résolution de  $\Delta\phi$  dans les régions de couplage

Résolution de  $\phi$  et  $\phi_r$  dans les régions volumiques

### *Programme superviseur*

Voici le programme superviseur qui permet d'automatiser le scénario mentionné

C : Fichier superviseur

C : Probleme magnetostatique en potentiels reduit et total

C : But

C : Creer automatique de la Region\_de\_Couplage

C : Creer automatique de la Contrainte\_de\_Couplage

C : Creer automatique des Contraintes\_Normal ponctuelles

C : Creer automatique des Contraintes\_Normal lineiques

C : Creer automatique des Contraintes\_Normal surfaciques

C : Mener la resolution en deux temps

C : Condition

C : Les regions volumiques doivent etre creees et activees

C : Le maillage doit etre cree

C : Creation le 28-02-1997

C : Debut de la procedure principale

MAIN

C : Variables locales

INTEGER FOR\_TOT

INTEGER FOR\_RED

INTEGER FOR\_CRT

INTEGER NRG\_TOT

INTEGER NRG\_RED

INTEGER REG\_CRT

C : Initialisation des tables

INTEGER REG\_TOT[]

INTEGER REG\_RED[]

C :

CHARACTER NOMF\_TOT

CHARACTER NOMF\_RED

CHARACTER NOMF\_CRT

CHARACTER TYPE\_CT

C : Affectation des noms

NOMF\_TOT = MS3SCA

NOMF\_RED = MS3RED

NOMF\_CRT = MS3CRT

TYPE\_CT = COUPLAGE\_RED\_TOT

C : Recherche dans la base de problemes des formulations associees

CALL formulation\_par\_nom &NOMF\_TOT FOR\_TOT

CALL formulation\_par\_nom &NOMF\_RED FOR\_RED

CALL formulation\_par\_nom &NOMF\_CRT FOR\_CRT

C : Recherche des regions volumiques qui ont la meme formulation

CALL groupe\_reg &FOR\_TOT NRG\_TOT REG\_TOT

CALL groupe\_reg &FOR\_RED NRG\_RED REG\_RED

C : Creer de la region et contrainte de couplage

CALL creer\_reg\_couplage &FOR\_TOT &FOR\_RED &FOR\_CRT REG\_CRT

CALL creer\_cont\_couplage &FOR\_TOT &FOR\_RED &TYPE\_CT

C : Creer des contraintes ponctuelles source et reduit

CALL creer\_Dirichlet\_ponct\_crt &REG\_CRT &FOR\_CRT

CALL creer\_Dirichlet\_ponct\_red &REG\_CRT &FOR\_RED

C : Creer des contraintes lineiques de couplage

CALL creer\_cont\_lin\_flottant &REG\_CRT &FOR\_CRT

C : Creer des contraintes surfaciques à champ normal des potentiels réduit et total

CALL creer\_cont\_surf\_normal &FOR\_TOT

CALL creer\_cont\_surf\_normal &FOR\_RED

C : Activation, inactivation et premiere resolution

CALL activer\_region\_surf &REG\_CRT &FOR\_CRT

CALL desactiver\_groupe\_reg &NRG\_TOT &REG\_TOT

CALL desactiver\_groupe\_reg &NRG\_RED &REG\_RED

CALL resoudre\_etape 0

C : Activation, inactivation et deuxième résolution

CALL desactiver\_region\_surf      &REG\_CRT

CALL activer\_groupe\_reg      &NRG\_TOT      &REG\_TOT      &FOR\_TOT

CALL activer\_groupe\_reg      &NRG\_RED      &REG\_RED      &FOR\_RED

CALL resoudre\_etape      0

C : Fin du fichier superviseur

END\_MAIN

Les nombres d'interaction à effectuer pour accomplir la mise en oeuvre sont indiqués au tableau VII.1

Tableau VII.1  
Comparaison du nombre d'interactions manuelles

Actions	Sans automatisation	Langage dédié
+ contraintes ponctuelles	17	0
+ contraintes cycliques	43	0
+ contrainte surfacique de $\Delta\phi$	13	0
+ conditions de couplage de $\Delta\phi$	390	0
+ régions surfaciques	156	0
+ activation des résolutions	52	0
+ visualisation des faces cachées	151	0
Nombre total de manipulations	822	0

L'utilisation du langage dédié permet de améliorer considérablement le coût de l'intervention manuelle et d'automatiser la mise en oeuvre de la démarche avec sûreté et grande souplesse.

## VII.7. Conclusions

La complexité éventuelle de la démarche nous a poussé à étudier l'automatisation. Parmi les méthodes existantes, le langage dédié de haut niveau, permettant d'automatiser la mise en oeuvre de la démarche avec souplesse et facilité d'adaptation aux diverses applications, a été retenu.

Nous avons créé un langage dédié robuste ayant en soi deux mécanismes principaux. L'un consiste à exécuter les commandes de base, et l'autre offre la possibilité de structurer à haut niveau l'automatisation des applications complexes.

Pour cela, les difficultés de la réalisation informatique ont dû surmonter, en vue d'offrir la capacité d'appeler récursivement et de gérer efficacement les paramètres et la mémoire. Le descriptif du langage a été présenté à deux niveaux: les commandes de base et les commandes propres à la mise en oeuvre de notre démarche.

Nous avons présenté un cas simple de l'application pour illustrer la réalisation réelle du langage dédié. Et nous avons enfin appliqué cette méthodologie à l'automatisation de la modélisation du ralentisseur magnétique en fonctionnement magnétostatique.

Cette application est réutilisable pour tout autre dispositif qui doit être résolu en potentiel scalaire magnétique.

## Références

[Bouazza-95] *M. Bouazza*, “La norme STEP”, édition de Hermes, 1995.

[Creveuil-74] *M. Creveuil*, “Macro-Mécanisme pour le Langage de Commande d’un Système Conversationnel”, thèse de l’Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1974.

[Eustache-95] *P. Eustache*, “Utilisation d’un Environnement Eléments Finis (SIC) pour le Traitement Couplé en Magnéto-thermique”, thèse de l’INPG, LEG, 1995.

[Wilhelm-94] *R. Wilhelm et D. Maurer*, “Les Compilateurs”, édition de Masson, 1994.





CHAPITRE VIII

**VERS LA MODELISATION D'UN MOTEUR  
A RELUCTANCE VARIABLE**



## Chapitre VIII. Vers la modélisation d'un moteur à réluctance variable

### *Situation*

*La modélisation du moteur à réluctance variable met en jeu une procédure très complexe car elle doit prendre en compte les composants électroniques du circuit électrique, le mouvement du rotor et le calcul en pas à pas dans le temps.*

### *Question*

*Vu la complexité de la modélisation à réaliser, la démarche en potentiel scalaire magnétique reste elle applicable ?*

### *Démarche directrice*

*Le circuit électrique est pris en compte en utilisant les potentiels nodaux intégrés dans le temps. La méthode de substitution est utilisée pour assurer la continuité tangentielle du champ magnétique à travers l'interface de glissement entre les parties fixe et mobile. L'aspect dynamique du problème est considéré en effectuant un calcul en pas à pas dans le temps.*

## VIII.1. Introduction

La démarche que nous avons présenté a été appliquée à de nombreux problèmes différents. En résumé, ces modélisations ont porté sur le problème international N°13 du TEAM Workshop (cf. chapitre I), sur le ralentisseur magnétique (cf. chapitre II), sur le moteur Lavet de montre (cf. chapitre III) et sur la micro bobine à champ intense (cf. chapitre V). Ces applications ont permis de valider au fur et à mesure des méthodes développées.

Pour clore cette étude, nous souhaitons montrer la faisabilité de la modélisation d'une machine tournante et de son circuit d'alimentation en potentiel scalaire magnétique et vecteur électrique. A titre d'illustration, nous avons choisi d'étudier un moteur à réluctance variable.

## VIII.2. Grandes lignes du moteur à réluctance variable

### VIII.2.1. Description du moteur à réluctance variable

#### *VIII.2.1.1. Principe de fonctionnement*

Le moteur à réluctance variable étudié est mis au point par Moulinex, il est alimenté par un circuit comportant des composants électroniques. Le rotor est en mouvement et le champ magnétique est créé par des conducteurs bobinés raccordés au circuit d'alimentation.

Le principe de fonctionnement du moteur à réluctance variable consiste à faire tourner le rotor de telle façon que la réluctance soit minimale. Le champ magnétique est créé par deux phases de bobinages statoriques et le rotor a tendance de prendre une position qui correspond à la réluctance minimale. Afin de pouvoir créer une rotation continue du rotor, il faut alimenter les phases de moteur en fonction de l'angle rotorique, en assurant toujours une avance par rapport à

la position de réluctance minimale du rotor. Dans le moteur, un capteur de position est disponible afin de pouvoir donner les consignes de commande concernant l'activation des transistors du circuit d'alimentation. La géométrie du moteur est montrée sur la figure VIII.1.

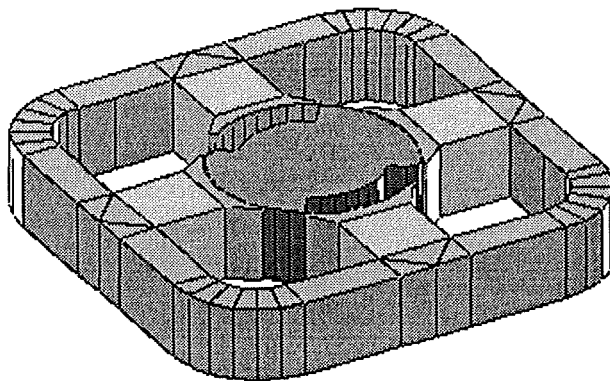


Figure VIII.1a. Culasse et rotor du moteur à réluctance variable

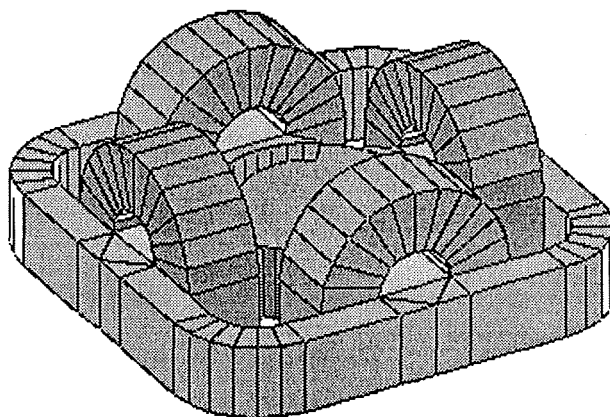


Figure VIII.1b. Partie ferromagnétique et bobines du moteur

#### VIII.2.1.2. Schéma du circuit

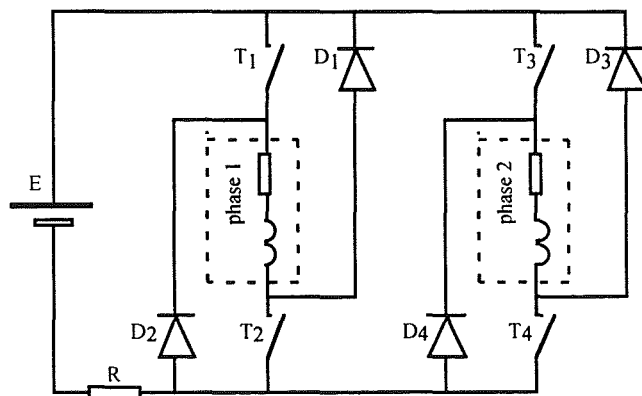


Figure VIII.2. Circuit d'alimentation du moteur

Le circuit électrique est constitué par des transistors, des diodes, des résistances internes, une source de tension et des bobinages statoriques qui sont pris en compte par la modélisation des

milieux continus. Les phases sont alimentées par une source de tension à travers les transistors lorsque ceux ci sont fermés. Les diodes sont bloquées en subissant une tension inverse. Lorsque les transistors sont ouverts, le courant résiduel dans les inductances traverse les diodes. Le schéma du circuit est le suivant (figure VIII.2)

### VIII.2.2. Considération symétrique

La géométrie du moteur possède un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe du moteur. Cette considération permet de réduire la moitié le nombre de noeuds requis pour le calcul du champ magnétique comme illustré sur les figures VIII.1a et VIII.1b.

Une deuxième symétrie cyclique permet également de réduire le domaine discrétisé à un quart du moteur. Cependant, suite au mouvement du maillage du rotor, il est difficile de gérer les conditions cycliques au niveau de la partie mobile. Par conséquent, nous nous contenterons de ne prendre en compte que la première symétrie.

### VIII.2.3. Hypothèses

Nous effectuons quelques hypothèses simplificatrices:

- La vitesse est considérée comme constante,
- Le moteur est en fonctionnement magnétodynamique traité par la méthode en pas à pas implicite dans le temps, en négligeant les courants induits dans le circuit magnétique.

## **VIII.3. Réalisation informatique**

### VIII.3.1. Etat des lieux

La modélisation du moteur en question a été effectuée par T. Dreher [Dreher-94], R. Perrin-Bit [Perrin-Bit-94] dans l'environnement logiciel MV3DYN. Le potentiel vecteur magnétique discrétisé en éléments finis nodaux a été utilisé pour modéliser les milieux continus du problème.

Actuellement, cet objectif est repris en adoptant des démarches différentes, essentiellement au niveau des formulations, en espérant réduire le coût du calcul et améliorer la précision obtenue. En utilisant les éléments d'arête en potentiel vecteur magnétique, C. Golovanov travaille également sur ce problème [Golovanov-97]. L'apport de nos travaux sur la modélisation de ce moteur conduit à utiliser le potentiel scalaire magnétique en vue de diminuer le coût du calcul.

Nos travaux profitent alors des résultats existants hérités de MV3DYN ainsi que de ceux actuellement réalisés par C. Golovanov.

### VIII.3.2. Objectifs

Notre ambition porte sur la mise en oeuvre du moteur dans notre environnement, et en même temps sur la mise en valeur de notre démarche en potentiel scalaire magnétique. Nous souhaitons également gérer les données du modèle par le structurateur de données de FLUX3D.

Les grandes lignes directrices de notre approche sont les suivantes

- Le comportement dynamique est traité par la méthode implicite en pas à pas dans le temps.
- Le circuit électrique, comprenant les diodes, les transistors, une source de tension et quelques résistances, est modélisé par les potentiels nodaux électriques intégrés dans le temps.
- Le mouvement est pris en compte en faisant bouger le maillage de la partie mobile du moteur. La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface de glissement entre les parties mobile et fixe est assurée par un couplage issu de la méthode de substitution.
- Le couplage entre le champ magnétique et le circuit électrique est effectué en résolvant simultanément les équations de champ et de circuit.

### VIII.3.3. Analyse des besoins

La modélisation du moteur à réluctance variable exige un couplage entre plusieurs phénomènes physiques différents: le mouvement du rotor, les composants électriques, le champ magnétique et aussi le comportement temporel du modèle.

Certaines difficultés sont alors inévitables tant au niveau implémentation qu'au niveau théorique. Au niveau implémentation, l'introduction des équations de circuit et du mouvement nécessite une programmation lourde. Au niveau théorique, la prise en compte du mouvement et des composants électroniques n'est pas évidente et demande certaines réflexions.

### VIII.3.4. Structure des données utilisée

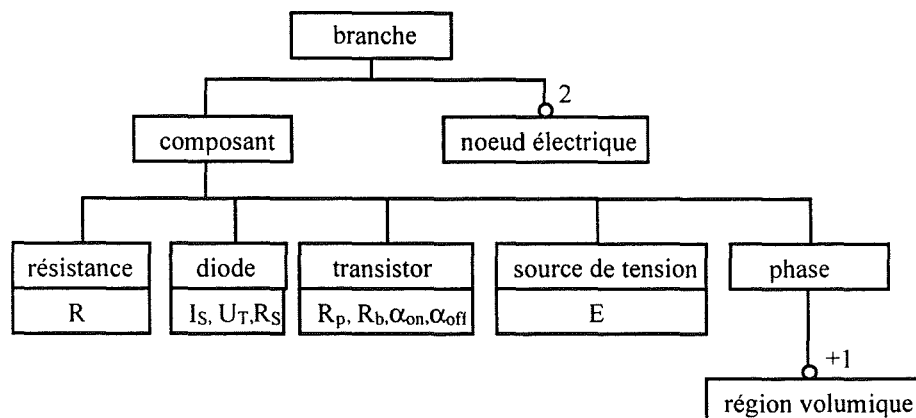


Figure VIII.3. Structure des données réalisée

La structure des données est bien évidemment décisive pour la qualité de la programmation à mener par la suite, surtout dans les systèmes complexes tel que celui que nous traitons. Plus la structure de données est cohérente et pertinente, plus la mise en oeuvre et la maintenance du système sont efficaces.

Au niveau du circuit électrique, chaque branche est associée à un composant et deux noeuds électriques. Chaque composant peut être une résistance, une diode, un transistor, une source de tension ou une phase qui est effectivement la partie magnétique maillée par des éléments finis nodaux.

La structure retenue est la suivante

Les caractéristiques des composants sont les suivantes

- Résistance
  - +  $R$ : valeur de la résistance
- Diode
  - +  $I_S$ : courant de saturation
  - +  $U_T$ : tension de température
  - +  $R_S$ : résistance de série
- Transistor
  - +  $R_P$ : résistance de passage
  - +  $R_B$ : résistance de blocage
  - +  $\alpha_{ON}$ : début de l'ouverture
  - +  $\alpha_{OFF}$ : fin de l'ouverture
- Source de tension
  - +  $E$ : tension à imposer
- Phase est le milieu continu qui est couplé avec le circuit

Par ailleurs, les objets concernant les bobines filaires et les trous doivent être créés pour favoriser le calcul analytique du potentiel  $T_0$ . Nous souhaitons également calculer le potentiel  $T_0$  de telle façon que les données se définissent facilement par interaction graphique. La structure suivante est alors proposée

bobine filaire	trou
+ points définissant $J$ + points définissant la hauteur + ligne définissant la largeur + volumes	+ points définissant la hauteur + volumes

Figure VIII.4. Bobine filaire et son trou pour le calcul de  $T_0$

#### VIII.4. Prise en compte des composants électroniques

La prise en compte des composants électroniques consiste premièrement à mettre en équations les circuits électriques. Dans notre cas, la méthode des potentiels nodaux intégrés dans le temps est utilisée pour modéliser les circuits électriques. Par ailleurs, un comportement non linéaire des diodes est souhaité du fait que l'instant de la fermeture des diodes n'est pas connu. L'utilisation des potentiels intégrés dans le temps ne peut pas prendre en compte directement la présence des sources de tension, donc un traitement supplémentaire doit être effectué pour ce type de



composant.

#### VIII.4.1. Mise en équations des circuits électriques [Dreher-94]

La mise en équations des circuits électriques peut se traiter par la méthode des potentiels nodaux, la méthode des courants de maille ou la méthode des potentiels nodaux intégrés dans le temps.

La méthode des potentiels nodaux cherche à calculer les potentiels électriques aux noeuds du circuit. Le premier théorème de Kirchhoff, concernant la nullité de la somme des courants totaux d'un noeud, est vérifié à l'aide d'un système d'équations de circuit. Le second théorème de Kirchhoff est naturellement satisfait. La méthode des potentiels nodaux permet de prendre en compte les sources de courant, les résistances et les capacités. Cependant elle est mal adaptée au traitement des inductances vu que le potentiel électrique aux bornes de ce composant peut être discontinu dans le temps, dans le cas où le circuit comporte des interrupteurs.

Réciproquement, la méthode des courants de maille consiste à vérifier le second théorème de Kirchhoff par un système d'équations. Elle permet de tenir compte des sources de tension, des résistances et des inductances et elle nécessite également la mise en oeuvre d'algorithmes pour la création de l'arbre du graphe et des mailles fondamentales. Le conditionnement de la matrice globale dépend de ce choix. Par ailleurs, les mailles de courant sont liées à la topologie du graphe, donc l'ouverture d'un interrupteur entraîne une coupure de certaines mailles, qui va changer le nombre d'inconnues du système. De plus, la prise en compte des capacité n'est pas directe.

La méthode des potentiels nodaux intégrés dans le temps se base sur le même principe que la méthode des potentiels nodaux sauf que le potentiel est intégré dans le temps. Cette approche s'adapte à l'analyse de circuits électriques composés de sources de courant, d'inductances, de résistances et de capacités puisque le potentiel intégré est continu dans le temps. En plus, le changement de topologie du circuit n'influe pas nécessairement sur le nombre d'inconnues avec ce genre de potentiel, et la prise en compte des interrupteurs n'ajoute donc pas de difficultés supplémentaires.

La méthode des potentiels nodaux intégrés dans le temps semble être la mieux adaptée au problème que nous souhaitons résoudre. Elle permet de prendre en compte la présence des interrupteurs du circuit et le couplage des équations de circuit avec les équations de champ est facilement réalisable.

##### *Méthode des potentiels nodaux intégrés*

Nous définissons un potentiel nodal intégré  $\psi_i$  tel que

$$\Psi_i = \int_{\tau=0} V_i d\tau \quad (\text{VIII.1})$$

où  $V_i$  est le potentiel nodal électrique correspondant.

La tension de la branche définissant par deux noeuds  $i$  et  $j$  est donnée par

$$U_{ij} = \frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{d\Psi_j}{dt} \quad (\text{VIII.2})$$

L'utilisation de ce potentiel assure le second théorème de Kirchhoff. La somme des tensions de branches d'un chemin fermé s'annule naturellement. Par contre, le premier théorème de Kirchhoff doit être vérifié et introduit dans le système global des équations. Pour chaque noeud électrique i, le premier théorème de Kirchhoff se traduit par:

$$\sum B_k \Psi_i + \sum G_k \frac{d\Psi_i}{dt} + \sum C_k \frac{d^2 \Psi_i}{dt^2} + n_{ik} I_{Si} = 0 \quad (\text{VIII.3})$$

L'addition est prise sur toutes les branches k connectées avec le noeud i avec

$B_k = \pm b_k$ ,  $b_k$  est la réluctance de la branche k

$G_k = \pm g_k$ ,  $g_k$  est la conductance de la branche k

$C_k = \pm c_k$ ,  $c_k$  est la capacité de la branche k

$I_{Si}$  est le courant source alimenté au noeud i

$n_{ik} = 1$  si la branche k est connectée au noeud i et la branche n'est pas orientée vers i

$n_{ik} = -1$  si la branche k est connectée au noeud i et la branche est orientée vers i

$n_{ik} = 0$  si la branche k n'est pas connectée au noeud i

Le signe + correspond au cas où la branche k est orientée vers le noeud i et le signe – dans le cas contraire.

Les coefficients  $n_{ik}$  sont les éléments de la matrice [N] qui s'appelle matrice d'incidence noeud – branche qui représente la structure des connexions entre les noeuds du circuit

$$[N] = (n_{ij}) \quad i = 1 \dots p, j = 1 \dots b \quad (\text{VIII.4})$$

où p est le nombre de noeuds électriques et b est le nombre de branches.

L'écriture matricielle de la relation (VIII.3) donne

$$[N] \{ \Psi \} + [B_n] \{ \Psi \} + [G_n] \frac{d\{ \Psi \}}{dt} + [C_n] \frac{d^2 \{ \Psi \}}{dt^2} = 0 \quad (\text{VIII.5})$$

avec

$$[G_n] = [N_f] [G] [N_f]^T \quad (\text{VIII.6})$$

$$[B_n] = [N_f] [B] [N_f]^T \quad (\text{VIII.7})$$

$$[C_n] = [N_f] [C] [N_f]^T \quad (\text{VIII.8})$$

La matrice  $[N_f]$  est la matrice pour des courants fondamentaux du circuit obtenue en enlevant une ligne de  $[N]$  et les matrices  $[G]$ ,  $[B]$  et  $[C]$  sont définies de la manière suivante

$g_{ii} = (R_i)^{-1}$  conductance de la branche  $i$

$b_{ii} = (L_i)^{-1}$  réluctance de la branche  $i$

$c_{ii} = C_i$  capacité de la branche  $i$

$g_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0$  si  $i \neq j$

#### VIII.4.2. Comportement non linéaire des diodes

Pour les diodes, l'état d'ouverture ou de fermeture dépend de la tension aux bornes du composant. L'état conducteur des diodes peut changer d'un moment à l'autre.

Deux modèles suivants ont été expérimentés par le passé:

- Le modèle discontinu  $r/R$  qui modélisent respectivement l'état passant et l'état bloqué de la diode,
- Le modèle non linéaire que nous allons développer ci dessous qui semble préférable d'un point de vue numérique, puisqu'il fait passer continûment de l'état passant à l'état bloqué [Dreher-94].

L'état de conduction des diodes est vérifié et corrigé au fur et à mesure des itérations de la méthode Newton-Raphson. Le courant  $I_d$  de la diode est donné par

$$I_d = I_s (e^{U_{pn}/U_T} - 1) \quad (\text{VIII.9})$$

où

$U_{pn}$  est la tension à l'interface p-n

$I_s$  est le courant de saturation

$U_T$  est la tension de température

Les valeurs typiques pour  $I_s$  et  $U_T$  sont

$$I_s = 1 \mu A$$

$$U_T = 26 \text{ mV}$$

La tension  $U_{pn}$  n'est pas accessible de l'extérieur du composant. Le circuit équivalent d'une diode réelle est présenté sur la figure VIII.5 dans lequel une résistance de série  $R_s$  est nécessairement introduite

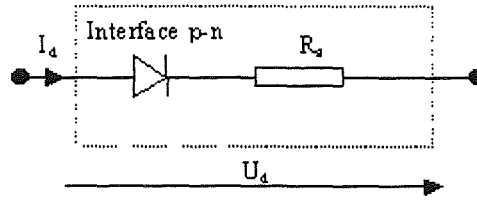


Figure VIII.5. Circuit équivalent d'une diode réelle

Pour déterminer la conductance de la diode à partir de  $U_d$ , il faut résoudre l'équation non linéaire suivante par la méthode Newton-Raphson

$$U_{pn} + R_s I_d(U_{pn}) = U_d \quad (\text{VIII.10})$$

#### VIII.4.3. Prise en compte des sources de tension

La méthode des potentiels nodaux intégrés que nous avons choisi ne permet pas de prendre en compte directement les sources de tension. Le moteur à étudier est pourtant alimenté par une telle source, donc la prise en compte de ce composant est nécessaire.

Aux bornes a et b de la source de tension  $U_s$ , la différence des potentiels intégrés est définie par la relation suivante [Dreher-94] :

$$\Psi_a - \Psi_b = \int_{\tau=0}^t U_s d\tau \quad (\text{VIII.11})$$

La connaissance de cette différence permet d'établir une combinaison linéaire (au sens du chapitre II) entre les variables des deux potentiels intégrés  $\psi_a$  et  $\psi_b$ . Le potentiel  $\psi_a$  est exprimé en termes du potentiel  $\psi_b$  et de l'intégrale de la tension source par la relation

$$\Psi_a = \Psi_b + \int_{\tau=0}^t U_s d\tau \quad (\text{VIII.12})$$

Lorsque la variable est exprimée par une combinaison linéaire telle que celle décrite dans le chapitre II, son calcul peut être omis. Il suffit alors de la remplacer dans chacune des équations où elle apparaît. Cette méthode de substitution réduit le nombre d'inconnues du système et de plus la symétrie du système global est conservée.

### **VIII.5. Prise en compte du comportement dynamique**

Le fonctionnement du circuit électrique utilisé définit clairement un comportement dynamique du modèle. Pour le modéliser, une méthode en pas à pas dans le temps est utilisée. Le couplage entre des équations de champ et de circuit peut conduire à une dégradation de la convergence, ce qui rend nécessaire l'introduction de certaines améliorations dans la numérotation des variables.

### VIII.5.1. Méthode en pas à pas dans le temps

Le comportement du moteur est évolutif. Les modèles purement statiques ou dynamiques ne sont plus adaptés. Les caractéristiques spectrales du moteur peuvent être réparties sur une large bande de fréquences, et par conséquent un calcul réduit à quelques harmoniques est impossible. Dans une telle situation, la méthode en pas à pas semble être la mieux adaptée.

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la dérivée d'une variable d'état par une différence finie. Dans notre cas, nous avons adopté un schéma implicite. Par exemple, la dérivée du potentiel nodal intégré est obtenue à partir des valeurs de deux pas consécutifs

$$\frac{d\Psi}{dt} \approx \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{\Psi(t) - \Psi(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{VIII.13})$$

### VIII.5.2. Mise en équations du problème

Le potentiel scalaire magnétique est utilisé pour modéliser le champ magnétique dans les milieux continus, alors que le potentiel intégré dans le temps prend en compte l'existence des circuits électriques dans le système global. Le couplage entre les équations de champ et de circuit s'effectue en ajoutant les courants des conducteurs bobinés aux inconnues du problème. Le vecteur des variables à calculer du système sera

$$[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, I_1, I_2, \dots, I_b, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p]$$

où

$n$  est le nombre de noeuds actifs des milieux continus,

$b$  est le nombre de conducteurs bobinés actifs,

$p$  est le nombre effectif de potentiels électriques intégrés.

Le système final est composé des équations des potentiels scalaires magnétiques aux noeuds des éléments finis, des équations pour la tension aux bornes des conducteurs bobinés, et des équations des potentiels intégrés dans le temps aux noeuds électriques issues du premier théorème de Kirchhoff.

Les équations du champ magnétique s'écrivent

$$\text{div } \mu ( \mathbf{T}_0 - \text{grad } \phi ) = 0 \quad \text{dans les phases} \quad (\text{VIII.14})$$

$$\text{div } \mu ( - \text{grad } \phi ) = 0 \quad \text{dans le reste} \quad (\text{VIII.15})$$

$$\text{où } \mathbf{T}_0 = N_s I_k \mathbf{t}_{0k} \quad \text{dans la phase } k$$

$N_s$  est le nombre de spires de la bobine.

La tension aux bornes du conducteur bobiné  $k$  est donnée par la relation suivante

$$U_k = R_k I_k + \frac{d}{dt} \int_{\text{phase } k} \mathbf{t}_{0k} \mathbf{B} d\Omega = [\mathbf{N}]^T \frac{d}{dt} \{\Psi\} \quad (\text{VIII.16})$$

Les équations de circuit sont données sous la forme matricielle suivante

$$[\mathbf{N}] \{\dot{\mathbf{I}}\} + [\mathbf{B}_n] \{\Psi\} + [\mathbf{G}_n] \frac{d\{\Psi\}}{dt} + [\mathbf{C}_n] \frac{d^2 \{\Psi\}}{dt^2} = 0 \quad (\text{VIII.17})$$

En appliquant la méthode en pas à pas dans notre cas, nous avons

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{C} & \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j^{(h)} \\ \mathbf{I}_k^{(h)} \\ \Psi_p^{(h)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{E} \phi_j^{(h-1)} + \mathbf{C} \mathbf{I}_k^{(h-1)} + \mathbf{N} \Psi_p^{(h-1)} \\ \mathbf{D} \Psi_p^{(h-1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{VIII.18})$$

dans laquelle

$$A_{ij} = \int \text{grad}^T \alpha_i \mu \text{grad} \alpha_j d\Omega \quad (\text{VIII.19})$$

$$B_{ik} = -N_s \int \text{grad}^T \alpha_i \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VIII.20})$$

$$C_{kk} = N_s \int \mathbf{t}_{0k}^T \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad (\text{VIII.21})$$

$$E_{kj} = - \int \mathbf{t}_{0k}^T \mu \text{grad} \alpha_j d\Omega \quad (\text{VIII.22})$$

$$D_{pp} = \frac{1}{\Delta t} G_n \quad (\text{VIII.23})$$

### VIII.5.3. Amélioration de la renumérotation des variables

Nous avons opté pour l'utilisation d'un solveur de type gradient conjugué afin de résoudre le système obtenu. Dans ce cas, la convergence est liée à l'ordre dans lequel les équations sont assemblées. Il est préférable de renuméroter les variables de telle sorte que le maximum de termes non nuls entourent la diagonale principale de la matrice.

Dans le cas du couplage direct entre équations de champ et de circuit électrique, la largeur de bande est localement augmentée, ce qui peut avoir des effets néfastes sur la convergence de la résolution. Pour améliorer le conditionnement de la matrice, il est souhaitable de ne renuméroter que la matrice issue des équations de champ par la méthode Kuthill-McKee comme illustré sur la figure VIII.6.

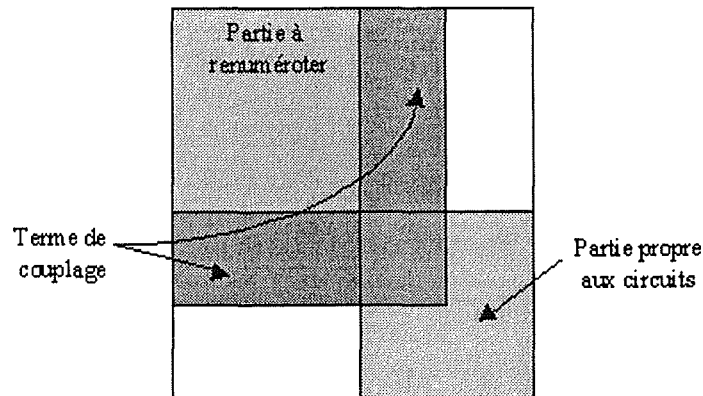


Figure VIII.6. Renumérotation des variables de la matrice

## VIII.6. Prise en compte du mouvement

### VIII.6.1. Mobilité du maillage

La méthode en pas à pas effectue une résolution à chaque pas d'avancement du rotor. Une des méthodes permettant une prise en compte du mouvement dans un tel cas est de faire bouger le maillage au fur et à mesure de la rotation du rotor. Pour cela, on distingue deux types de régions différentes selon leur mobilité, les unes bougent et les autres restent fixes. A l'interface entre les régions fixe et mobile, les noeuds sont dédoublés.

Le maillage du moteur est montré à la figure VIII.7. L'avancement du rotor est également illustré par les figures VIII.8.

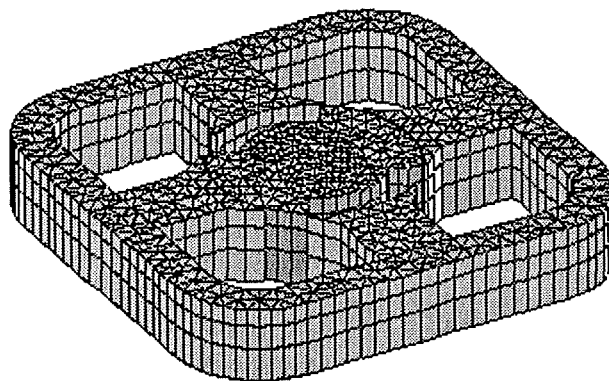


Figure VIII.7. Maillage du moteur à réluctance variable

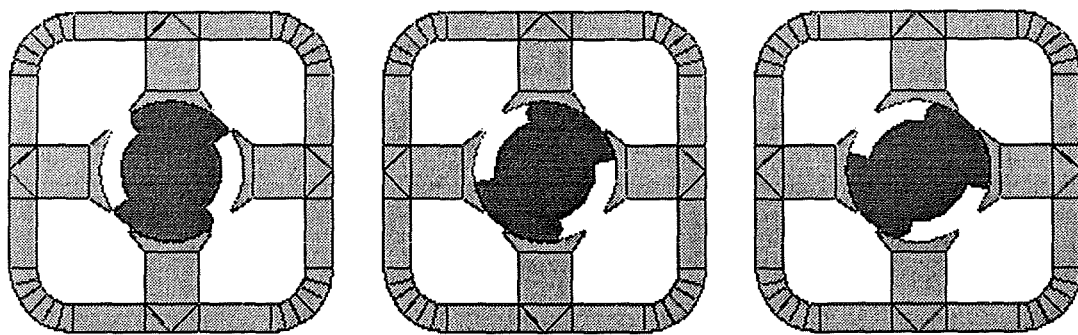


Figure VIII.8. Avancement du rotor

Le champ est alors calculé dans deux maillages. L'un (comportant le stator, l'entrefer et la boîte d'air) est fixe, et l'autre (comportant le rotor) est en mouvement. Pour chaque pas de calcul, nous appliquons une rotation du maillage de la partie mobile. La numérotation des noeuds reste intacte, seules leurs coordonnées vont changer. Une telle démarche permet de prendre en compte facilement le mouvement du rotor, cependant la continuité de la composante tangentielle du champ à l'interface entre les régions fixe et mobile doit être assurée, ce qui revient à assurer la continuité du potentiel.

#### VIII.6.2. Méthode de substitution des variables [Perrin-Bit-94]

La condition de passage à l'interface entre les régions mobile et fixe est assurée à l'aide des combinaisons linéaires interpolant les variables nodales sur la frontière de couplage en utilisant la technique décrite au chapitre II. Au bord du maillage mobile, la valeur nodale du potentiel scalaire magnétique est égale à la valeur de son interpolation dans l'élément fini surfacique qui se trouve en vis à vis

$$\phi^m = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i^f \quad (\text{VIII.24})$$

dans laquelle

$\phi^m$  est le potentiel au noeud à calculer de la région mobile,

$\phi^f$  est le potentiel des noeuds de l'élément en face de la région fixe,

$\alpha_i$  est la fonction d'interpolation de l'élément en face à la position calculée,

$N$  est le nombre de noeuds de cet élément.

#### VIII.7. Validation numérique

Vu la complexité de la mise en oeuvre, nous avons opté pour valider la méthode proposée en deux étapes.

La première étape consiste à valider le couplage entre équations de champ et de circuits dans le cadre d'un modèle variable dans le temps sans mouvement. Il s'agit d'un contacteur non linéaire.



La deuxième étape cherche à valider qualitativement le moteur à réluctance variable dans la limite d'un fonctionnement linéaire. Le mouvement est pris en compte et le circuit comporte des composants électroniques.

### VIII.7.1. Contacteur non linéaire

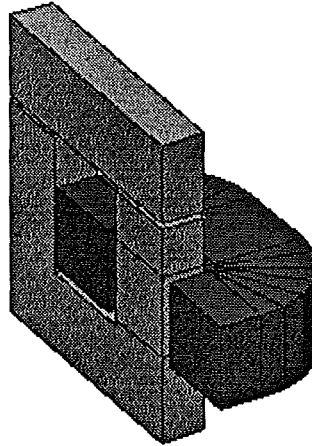


Figure VIII.9. Géométrie du noyau UI avec le bobinage

La première étape est effectuée en prenant comme exemple un cas d'école. Il s'agit d'un circuit ferromagnétique excité par une bobine filaire. Le noyau de la forme UI permet de faire varier l'épaisseur de l'entrefer. En alimentant la bobine avec différents courants, ce modèle permet de valider la prise en compte de la saturation magnétique du matériau et du comportement variable dans le temps.

Une bobine rectangulaire de 3100 spires est placée sur le noyau en ferrite. En profitant de la symétrie du champ, la simulation ne présente que la moitié de la géométrie. La figure VIII.9 montre la géométrie du noyau, la bobine et l'entrefer qui vaut 2mm. Le comportement non linéaire du matériau est présenté par la courbe  $B(H)$  de la figure VIII.10.

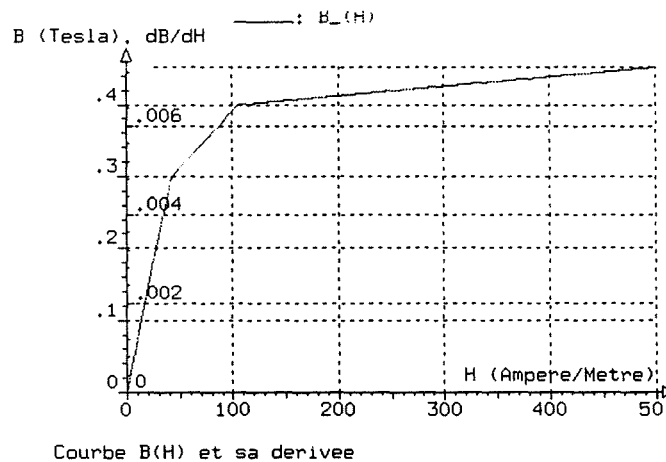


Figure VIII.10. Courbe  $B(H)$  du matériau

Figure VIII.10. Courbe B(H) du matériau

La figure VIII.11 montre le schéma électrique du modèle. La bobine est alimentée par une tension de la forme d'échelon, créant ainsi un champ magnétique croissant d'une manière exponentielle. Notre simulation utilise les potentiels électriques intégrés dans le temps comme variable d'état électrique. La résistance apparente  $R$  de la bobine pour un courant continu vaut  $63.9\Omega$ .

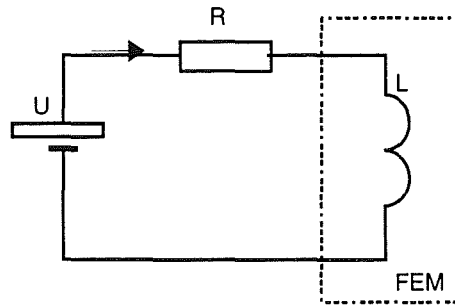


Figure VIII.11. Schéma électrique d'alimentation de la bobine

Le noyau magnétique et la boîte d'air ont été discrétisés en éléments tétraédriques de premier ordre. Le nombre d'éléments est 16016 et celui de noeuds est 2801.

Pour une alimentation avec une tension de 20V, les résultats sont comparés avec ceux obtenus par Thomas DREHER [Dreher-94] en utilisant la formulation Av. La figure VIII.12 montre une très bonne concordance.

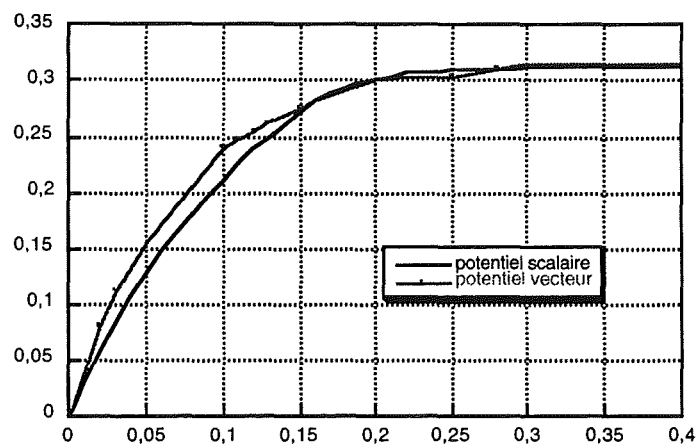


Figure VIII.12. Comparaison avec la formulation Av

Du fait que l'entrefer du modèle est assez grand, nous avons tenté également de comparer ces résultats avec ceux issus d'un modèle linéaire ayant une perméabilité relative qui vaut 1000. La cohérence obtenue est très satisfaisante comme l'illustre à la figure VIII.13.

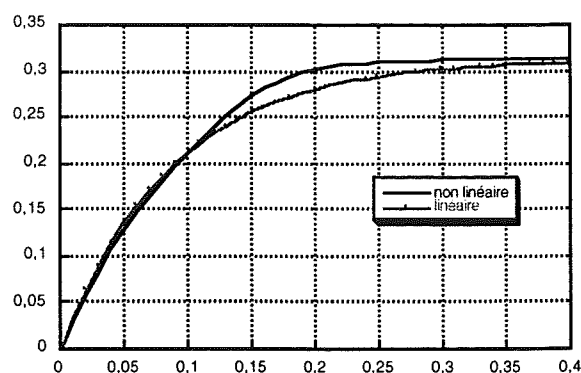


Figure VIII.13. Comparaison avec un modèle linéaire.

### VIII.7.2. Moteur à réluctance variable linéaire

Nous avons effectué 35 pas de temps avec un pas de temps égal à  $81.7 \mu\text{s}$ . La résolution a été effectuée en linéaire, en considérant une perméabilité relative des régions perméables de 800. Le modèle comporte 41243 inconnues magnétiques et 7 inconnues électriques. Le temps total CPU pour résoudre le problème a été de 26 heures. La tension imposée vaut 250 V avec la vitesse 16700 tr/min. L'angle d'avance vaut  $30^\circ$ .

La figure VIII.14 montre la comparaison du courant d'alimentation entre les résultats de simulation et ceux de mesure. Nous observons alors une concordance qualitative, sauf que il existe une différence de valeur maximale du courant.

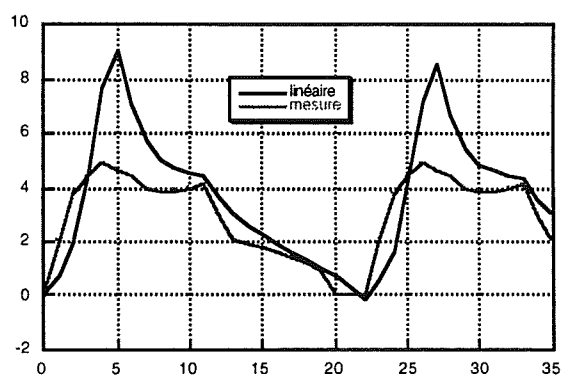


Figure VIII.14. Comparaison avec la mesure

L'explication provient du fait que à la position concernant le courant maximal comme l'illustre la figure VIII.15 l'induction est très faible, ce qui donne une perméabilité réelle beaucoup plus faible que nous avons choisi dans notre modèle linéaire, de 2 à 10 fois. Alors le courant réel est moins grand que celui issu de la simulation. Par ailleurs, il faut raffiner le pas de rotation du rotor, qui est assez grossier dans notre modèle, pour pouvoir prendre en compte la montée

brutale du courant.

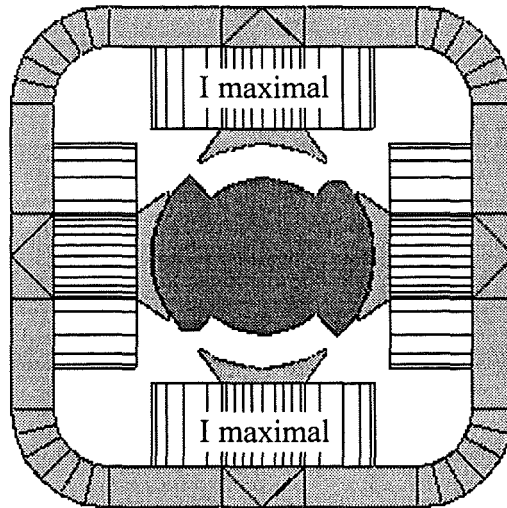


Figure VIII.15. Position du rotor concernant le courant maximal

Cette simulation nous a permis de montrer le bon fonctionnement de la mise en oeuvre.

### VIII.8. Conclusions

Nous avons montré la faisabilité de la modélisation du moteur à réluctance variable par une formulation essentiellement basée sur le potentiel scalaire magnétique. Il s'agit d'une alternative économique et fiable au potentiel vecteur magnétique.

Nous avons validé notre approche en implantant le mouvement et le couplage avec les équations de circuit dans notre code de calcul. La comparaison mesure/simulation a confirmé la validité qualitative de notre démarche.

## Références

[Dreher-94] *T. Dreher*, “Couplage de la Méthode des Eléments Finis Tridimensionnels avec une Méthode d’Analyse du Circuit Electrique: Application à la Modélisation des Machines Electriques Tournantes”, thèse de l’INPG, 1994.

[Golovanov-97] *C. Golovanov*, thèse de l’INPG à soutenir en octobre 1997.

[Perrin-Bit-94] *R. Perrin-Bit*, “Modélisation des Machines Electriques Tournantes par la Méthode des Eléments Finis Tridimensionnels : Calcul des Grandeurs Magnétiques avec Prise en compte du Mouvement ”, thèse de l’INPG, 1994.

## **CONCLUSION GENERALE**



## Conclusion générale

Au cours de ce travail de recherche nous avons tenté de repousser les limites du potentiel scalaire magnétique pour lui donner la même généralité que le potentiel vecteur magnétique.

Pour cela, il a fallu tout d'abord surmonter les difficultés concernant les régions à perméabilité élevée et les régions multiplement connexes.

Après avoir analysé les méthodes existantes, nous avons adopté la formulation en potentiels réduit et total pour traiter le problème d'imprécision dans les régions perméables. Le couplage entre les potentiels réduit et total est calculé à l'aide d'une méthode variationnelle garantissant une bonne précision globale. La systématisation de la démarche a été présentée et validée sur le problème international N°13 du TEAM Workshop.

L'introduction de conditions de couplage entre potentiels total et réduit nous a conduit à élaborer un outil robuste pour gérer les conditions aux limites. La méthode proposée nous a permis de traiter avec précision et économie les conditions aux limites complexes et interdépendantes rencontrées sur des problèmes réels. C'est aussi un premier pas vers l'automatisation de notre démarche décrite plus complètement au chapitre VII.

La deuxième limite du potentiel scalaire magnétique, rattachée au problème de connexité, a été traitée par introduction de coupures. Nous avons développé une méthode solutionnant ce problème dans le cas général ainsi que dans un cas particulier où la coupure devient implicite. Ces approches ont été validées sur un cas semi-analytique et sur le cas réel d'un moteur Lavet de montre.

Toutes les méthodes mentionnées précédemment sont applicables aussi bien aux problèmes magnétostatiques que magnétodynamiques.

Pour le fonctionnement magnétodynamique, les difficultés supplémentaires liées à la prise en compte du courant total imposé ont été résolues par introduction d'un potentiel  $T_0$  dans la formulation en potentiel vecteur électrique combiné avec le potentiel scalaire magnétique. Le calcul de  $T_0$  a été étudié en tenant compte de la présence de bobines inductrices très diversifiées. La méthode proposée permet de traiter l'ensemble des inducteurs rencontrés sans limitation. Une synthèse de la méthode de calcul de  $T_0$  a été réalisée.

Concernant l'alimentation des bobines, nous avons développé la méthode basée sur une résolution simultanée des équations de champ et de circuit électrique pour traiter les problèmes magnétodynamiques à tension imposée tout en conservant l'utilisation du potentiel scalaire magnétique. Nous avons établi la relation reliant le courant total, la tension et les variables d'état du champ magnétique pour que la formulation en potentiel scalaire magnétique puisse être employée dans le cas des bobines filaires ainsi que dans le cas des bobines massives. Le problème de connexité a été également pris en compte dans notre démarche.

La complexité éventuelle de la démarche qui repose généralement sur l'enchaînement de plusieurs résolutions nous a poussé à développer un langage dédié de haut niveau afin



d'automatiser la mise en oeuvre de cette dernière. Le langage créé nous a permis d'automatiser la démarche adoptée avec une grande souplesse et un souci constant de structuration.

Enfin nous avons vérifié que le potentiel scalaire était réellement une alternative au potentiel vecteur en montrant la faisabilité de la modélisation d'un moteur à réluctance variable qui combine plusieurs phénomènes différents: le mouvement, les composants électroniques du circuit électrique et le comportement évolutif du modèle.

Nous avons vérifié la validité des résultats pour cette application, ce qui nécessite un certain nombre de développements informatiques.

Nous avons validé la méthode proposée dans une simulation d'un contacteur non linéaire à tension d'échelon imposée et d'un moteur à réluctance variable linéaire. Les résultats obtenus sont très prometteux.

ANNEXE

# **RANGEMENT DES MATRICES**



## Annexe. Rangement des matrices

Lorsque l'on considère les matrices étudiées comme des matrices pleines, en ne tenant pas compte de la nullité de certains coefficients, le rangement des coefficients est très simple. Mais ce rangement est trop coûteux pour les matrices creuses de taille importante. Par conséquent, on souhaite exploiter au mieux la nullité des coefficients. Il y a plusieurs méthodes de rangement possibles. Certaines ne stockent aucun zéro au prix d'un algorithme compliqué, d'où un grand effort de calcul et une place mémoire coûteuse pour représenter la structure de la matrice. Ce coût vient en déduction de l'économie faite en ne stockant que les coefficients non nuls.

Pour une méthode de rangement, la place occupée en mémoire comprend la place nécessaire au stockage des valeurs des coefficients de matrice, la place nécessaire au stockage des indices de ligne et de colonne de chaque coefficient, et aussi l'information nécessaire pour aller chercher les uns après les autres tous les coefficients d'une même ligne ou d'une même colonne.

Examinons différents modes de rangement possibles.

### A.1. Rangement plein

Tous les coefficients de la matrice  $A$  à dimension  $(N,M)$ , y compris les coefficients nuls, sont rangés les uns après les autres, par exemple ligne par ligne, dans une table ATAB dont la position des éléments est repérée par un seul indice:  $A(i,j)$  est rangé dans  $ATAB(k)$  où  $k=M(i-1)+j$ .

Au total, il faut  $N.M$  places mémoires, ce qui est prohibitif pour une matrice creuse. Par contre on n'a besoin d'aucune information supplémentaire pour retrouver un coefficient d'indices  $(i,j)$  données, ni pour parcourir la  $i^{\text{ème}}$  ligne ou la  $j^{\text{ème}}$  colonne puisque l'on connaît explicitement la correspondance entre  $A(i,j) = ATAB(k)$ .

### A.2. Rangement profil

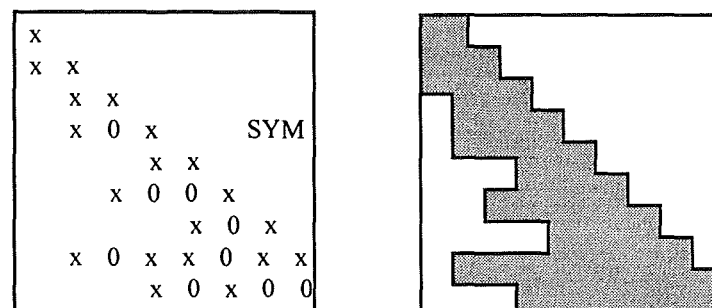


Figure A.1. Matrice creuse symétrique et son profil

Ce rangement fait intervenir la notion de profil d'une matrice. Ce type de rangement est utile par exemple lors de la factorisation de la matrice symétrique  $A$  d'ordre  $N$  sous la forme

$$A = L^T D L \quad (A.1)$$

dans laquelle le remplissage ne peut avoir lieu qu'à l'intérieur du profil comme illustré sur la figure A.1.

Remarquons que certains coefficients  $A(i,j)$  sont nuls, même si  $(i,j)$  est dans le profil, par contre si  $(i,j)$  n'appartient pas au profil alors  $A(i,j)$  est nécessairement nul. Pour stocker  $A$  sous forme profil, on ne stocke pas les coefficients dont les indices n'appartiennent pas au profil, mais on stocke tous les coefficients dont les indices appartiennent au profil, qu'ils soient nuls ou non. Le rangement de ses coefficients se fait dans une table ATAB à un seul indice, ligne par ligne. Pour représenter la structure de la matrice, on a besoin d'une table supplémentaire INDIAG de dimension  $N$  dont les éléments indiquent la position d'élément diagonal de chaque ligne dans ATAB. Soit la matrice  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & & & & & & & & & \\ 0.3 & 1.7 & \text{sym} & & & & & & & \\ 0 & 0.5 & 3.1 & & & & & & & \\ -2.1 & 0 & -1.2 & 4.3 & & & & & & \end{bmatrix}$$

(A.2)

Sera rangée par cette méthode comme l'indique le tableau A.1.

Tableau A.1. Places mémoires nécessaires pour le rangement profil

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ATAB	2.5	0.3	1.7	0.5	3.1	-2.1	0	-1.2	4.3
INDIAGL	1	3	5	9					

Ce rangement n'a pas d'intérêt si l'on veut seulement stocker la matrice car il oblige à réserver une place mémoire pour les éléments nuls situés dans le profil de la matrice, qui peuvent être très nombreux. Par contre, si il y a peu d'éléments nuls dans le profil comme c'est souvent le cas dans les matrices bandes, on ne perd pas beaucoup de place en réservant dès le départ la place mémoire nécessaire au stockage du profil de la matrice, et on gagne en simplicité et en place mémoire pour ranger l'information nécessaire à la représentation de la structure de la matrice et de  $L$ , entièrement contenue dans la seule table INDIAG de dimension  $N$ .

Pour les matrices carrées, la qualité de la factorisation dépend de la numérotation des variables. L'optimisation de la numérotation peut être effectuée soit en rangeant la matrice selon son profil (méthode de Cuthill Mac Kee et de minimisation d'accroissement du front [Lascaux-86]) soit en ne stockant que les coefficients non nuls (méthode du degré minimum [Hadj-92] [Ing-95] [Ing-95b]). Dans notre cas, malheureusement, ces outils ne sont pas applicables car la matrice des coefficients est souvent rectangulaire et non symétrique, et en plus, le remplissage peut avoir lieu à l'extérieur du profil.

### A.3. Rangement ligne par ligne [Lascaux-86]

Pour les matrices creuses à N lignes, la notation du profil n'est pas toujours utilisable. Le rangement peut effectuer ligne par ligne pour les M coefficients non nuls. Il suffit de générer les tables d'entiers INDC et INDPL, représentant les M valeurs des indices de colonnes de chaque coefficient et les N valeurs des positions dans ATAB du premier coefficient non nul de chaque ligne.

Par exemple pour la matrice à M = 7 et N = 3 comme suit

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 1.7 & 0 & 2.0 \\ 0 & -2.1 & 4.3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

les places mémoires sont montrées au tableau A.2.

Tableau A.2. Places mémoires nécessaires pour le rangement ligne par ligne

	1	2	3	4	5	6	7
ATAB	2.5	0.2	0.3	1.7	2.0	-2.1	4.3
INDC	1	3	1	2	4	2	3
INDPL	1	3	6				

### A.4. Rangement désordonné [Lascaux-86]

A l'opposé si la matrice A contient M coefficients non nuls et N lignes, en y ajoutant deux tables d'entiers INDL et INDSVL de dimension M, représentant les valeurs des indices de lignes et des positions suivantes dans ATAB de chaque coefficient, on peut ranger la matrice des coefficients dans un ordre aléatoire.

Il faut au total une place mémoire correspondant aux M réels de ATAB et aux 2M entiers de INDL et INDC. La valeur de A(i,j) est rangée dans ATAB(k) avec INDL(k) = i et INDC(k) = j.

En vue de calculer la transformation de la matrice, il faut pouvoir retrouver tous les coefficients d'une même ligne. Sans information supplémentaire, on serait obligé de passer en revue tous les indices de la table INDL. Pour éviter cela, on peut "chaîner" les coefficients, grâce à une table supplémentaire INDSVL, de dimension M, qui pour chaque coefficient, indique la position dans ATAB, du suivant selon l'ordre ligne par ligne. De plus il est nécessaire à connaître la position dans ATAB du premier coefficient non nul de chaque ligne, ce qui nécessite aussi une table supplémentaire d'entiers INDPL de dimension N.

La définition de ces deux tables est: INDSVL(k) = h si le suivant, dans l'ordre ligne par ligne, du coefficient rangé dans ATAB(k) se trouve dans ATAB(h). Le dernier coefficient n'a pas de suivant, il peut être utile de donner la valeur M+1 à INDSVL(h), et INDPL(i) = k si le premier

coefficient non nul de la  $i^{\text{ème}}$  ligne se trouve dans ATAB(k). On aura nécessairement  $\text{INDL}(k) = i$ . A l'aide des tables INDPL et INDSVL on peut parcourir une ligne choisie.

Avec ce mode de rangement, la matrice précédente est rangée comme sur le tableau A.3.

Tableau A.3. Places mémoires nécessaires pour le rangement désordonné

	1	2	3	4	5	6	7
ATAB	0.2	-2.1	0.3	1.7	2.5	2.0	4.3
INDL	1	3	2	2	1	2	3
INDC	4	2	1	2	1	4	3
INDSVL	3	7	4	6	1	2	8
INDPL	5	3	2				

### A.5. Méthode de rangement retenue

Malgré la simplicité de la démarche, le rangement plein n'est pas retenu puisqu'il est prohibitif pour une matrice creuse telle que la matrice des contraintes.

Le rangement profil est très intéressant car on ne perd pas beaucoup de place en réservant la place mémoire nécessaire au stockage du profil de la matrice, et on gagne en simplicité et en place mémoire pour ranger l'information nécessaire à la représentation de la structure de la matrice factorisée, entièrement contenue dans une seule table. Malheureusement cette méthode n'est applicable qu'au cas de matrice symétrique, dans laquelle le remplissage, lors de la factorisation  $A = L^T D L$ , ne peut avoir lieu qu'à l'intérieur du profil. Notre matrice de coefficients est bien creuse mais elle est souvent rectangulaire et non symétrique.

Le rangement ligne par ligne est aussi abandonné. La façon de définir l'information relative à la structure de la matrice, n'est pas très pratique lorsqu'on veut insérer un nouveau coefficient non nul dans la matrice. Supposons que l'on veuille, par exemple, ajouter un coefficient  $A(i,j)$  non nul. Après avoir déterminé la position dans ATAB où le nouveau coefficient doit être inséré, il faut le placer, décaler tous les coefficients qui suivent  $A(i,j)$  dans ATAB et mettre à jour la table INDPL pour toutes les lignes d'indice supérieur à  $i$ , et éventuellement égal à  $i$ .

Au contraire si on utilise le rangement désordonné, plus coûteux en place mémoire, il suffit de placer le nouveau coefficient  $A(i,j)$  après le dernier élément de ATAB, c'est-à-dire dans  $\text{ATAB}(M+1)$ , de définir  $\text{INDC}(M+1)$ , de modifier en deux endroits seulement la table INDSVL et de modifier uniquement INDPL si le nouveau coefficient est le premier d'une ligne. La programmation est cependant plus compliquée.

La méthode retenue est donc celle de rangement désordonné qui est la plus adaptée à la transformation de Gauss de la relation matricielle des conditions dont la matrice des coefficients est souvent rectangulaire et non symétrique.

## Références

[Hadj-92] *N. Hadj Said*, “Contribution à l’Automatisation de l’Analyse de Sécurité des Grands Réseaux de Transport et d’Interconnexion par une Approche Locale Frontière”, rapport de thèse de l’INPG, 1992.

[Ing-95] *K. Ing*, “Méthodes Numériques pour les Calculs des Réseaux Electriques: un Ordonnancement adapté aux Matrices Creuses”, Rapport de DEA du LEG-INPG, 1995.

[Ing-95b] *K. Ing*, “Méthodes Numériques pour les Calculs des Réseaux”, Rapport de Stage du LEG-INPG, 1995.

[Lascaux-86] *P. Lascaux et R. Théodor*, “Analyse Numérique matricielle appliquée à l’art de l’Ingénieur, tome 1”, Masson éditeur, 1986.



## **Amélioration de la formulation en potentiel scalaire magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuits électriques**

Le calcul de la distribution du champ magnétique est basé sur la formulation en potentiel scalaire magnétique dans le contexte des éléments finis nodaux.

Une amélioration de la formulation a été apportée en tenant compte de la perméabilité élevée des matériaux magnétiques et du problème de connexité.

La formulation en potentiel scalaire a été généralisée par l'introduction du couplage entre équations de champ et de circuits électriques. Un calcul préliminaire d'un potentiel vecteur électrique autorise la prise en compte de tout type de bobines, filaire ou massive. La résolution simultanée des équations de champ et de circuits mise en oeuvre permet traiter les problèmes à courant ou tension imposés et comportant des circuits d'alimentation avec des composants électroniques. Ces travaux sont validés sur plusieurs applications industrielles.

Au cours du déroulement de ces travaux, nous avons été amené à développer une méthode de gestion robuste pour des conditions aux limites complexes et un langage dédié de haut niveau pour automatiser la mise en oeuvre de notre démarche.

### **Mot-clés**

Electromagnétisme	Problème magnétodynamique
Eléments finis nodaux	Problème de connexité
Problème couplé	Erreurs d'arrondis
Potentiel scalaire magnétique	Langage dédié
Problème magnétostatique	Gestion des contraintes

## **Improvement of the magnetic scalar potential formulation and generalization to the coupling between field and electric circuit equations**

The computation of magnetic field distribution is based on the magnetic scalar potential formulation in a nodal finite element context.

An improvement of the formulation has been identified by taking into account the high permeability of the materials and of the connexity problem.

The scalar potential formulation has been generalized for introduction of the coupling between field and electric circuit equations. A preliminary computation of an electric vector potential allows to take into account all coil types, filament or massive. The simultaneous resolution of field and circuit equations implemented permits the treatment of current or voltage driven problems and supply circuit with electronic component problems. This work has been validated on many industrial applications.

In the course of these studies, we have developed a method of robust management for complex limited boundaries and a high level dedicated language to automate the implementation of our process.

### **Keywords**

Electromagnetism	Eddy current problem
Nodal finite elements	Connexity problem
Coupled problem	Cancel errors
Magnetic scalar potential	Dedicated language
Magnetostatic problem	Constraint management